

# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

---

СБОРНИК НАУЧНЫХ  
СТАТЕЙ

Выпуск 15

Под редакцией академика  
Б. Б. КАДОМЦЕВА



МОСКВА  
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ  
1987

УДК 533.9.01

**Вопросы теории плазмы:** Сб. науч. ст. Вып. 15/Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоатомиздат, 1987. 296 с.

Приведены обзоры по теории нагрева плазмы пучком релятивистских электронов за счет возбуждения пучковых неустойчивостей, изложена теория равновесия и МГД-устойчивости плазмы в стеллараторах; дан обзор по теории процессов переноса в плазме высокого давления, включая вопросы диффузии и генерации магнитного поля в плазме с  $\beta > 1$ .

Для научных работников и инженеров в области физики плазмы.

Табл. 1. Ил. 90. Библиогр. 307.

Редколлегия: А. А. Галеев, В. В. Паранл, О. П. Погуце,  
Д. Д. Рютов

Г. Е. Векштейн

## ВВЕДЕНИЕ

Прогресс в создании импульсных источников энергии большой мощности (лазеры, пучки заряженных частиц и др.) вызвал появление целого ряда новых предложений по использованию такой техники в работах по управляемому термоядерному синтезу (УТС). Эти предположения относятся к системам с высокой плотностью плазмы, где неприменим традиционный способ магнитного удержания плазмы. Поэтому возникает необходимость либо обеспечить эффективное термоядерное энерговыделение за время газодинамического разлета горячей плазмы (инерционный УТС), либо механически удерживать плазму жесткими стенками, а магнитное поле использовать лишь для подавления поперечной теплопроводности плазмы. Из-за малости частоты кулоновских столкновений в горячей плазме для последнего достаточно уже относительно слабого магнитного поля, так что его давление еще мало по сравнению с газокINETическим давлением плазмы  $p$  ( $\beta \equiv 8\pi p/B^2 \gg 1$ ). Поэтому такой метод удержания плазмы принято называть немагнитным или стеночным.

В настоящее время имеется несколько различных направлений, связанных с использованием плазмы с  $\beta \gg 1$  в работах по УТС. Одна из возможностей, впервые отмеченная еще в работах [1, 2], состоит в адиабатическом сжатии и нагреве плазмы с магнитным полем хорошо проводящей цилиндрической оболочкой (лайнером). При этом на конечной стадии процесса предполагается получить термоядерную плазму с температурой  $T \sim 10^4$  эВ, магнитным полем с  $B \sim 10^2$  Тл и плотностью  $n \sim 10^{20} \div 10^{21}$  см<sup>-3</sup>. Результаты соответствующих расчетов и экспериментов приведены в [3—7]. Основной проблемой здесь является обеспечение достаточно быстрого и устойчивого схлопывания лайнера при степени объемного сжатия порядка  $10^3$ . Недавно появились предложения по применению генераторов мощных электронных пучков для разгона микролайнеров с плотной плазмой [8]. Лазерный нагрев плотной ( $n \sim 10^{21}$  см<sup>-3</sup>) газовой мишени с магнитным полем рассматривался в [9]. Общим для перечисленных систем является то, что нагревая до температуры  $T \sim 10^4$  эВ термоядерная плазма имеет огромное давление (порядка  $10^{11}$  Па), так что такие установки представляют собой взрывные устройства с разрушающейся в каждом цикле оболочкой, которая удерживала плазму.

В неразрушаемых термоядерных установках давление плазмы не должно превышать примерно  $10^9$  Па, т. е. плотность  $n \leq 10^{18}$  см $^{-3}$ . Их практическая реализация связана с возможностью уменьшения потерь плазмы вдоль магнитного поля, например, на основе многопробочной магнитной ловушки (ММЛ) [10—12]. Вся концепция создания термоядерного реактора на основе ММЛ с немагнитным удержанием плазмы и ее нагревом с использованием релятивистских электронных пучков обсуждалась в [13, 14]. Следует отметить и возможность применения мощных СО $_2$ -лазеров для нагрева плазмы с плотностью  $n \sim 10^{16} \div 10^{18}$  см $^{-3}$  в длинных соленоидах [15]. Другой подход к термоядерным системам со стеночным удержанием плазмы, основанный на использовании ударных труб и специальных импульсных магнитных барьеров, рассматривался в [16].

Данный обзор посвящен задачам о диффузии тепла и магнитного поля в плазме с большим  $\beta$ , представляющим интерес как для работ по УТС, так и для различных астрофизических приложений. Дело в том, что в плотной плазме характер тепловых процессов существенно отличается от аналогичных явлений в разреженной плазме, где  $\beta$  мало. Связано это с тем, что при  $\beta \gg 1$  тепловая энергия плазмы намного превышает энергию магнитного поля. В результате этого тепловые процессы в такой плазме сопровождаются сильным искажением внешнего магнитного поля. Поскольку коэффициенты переноса горячей плазмы, в свою очередь, существенно зависят от магнитной индукции поля, то здесь возникает довольно сложная картина взаимосвязанных магнитотепловых явлений.

Аналогичные процессы, обусловленные взаимным влиянием диффузии тепла и магнитного поля, могут иметь место и в том случае, когда в разреженной плазме происходит локальное увеличение ее давления до значения  $p \geq B^2/(8\pi)$ , т. е.  $\beta \geq 1$ . Например, эти эффекты проявляются при обращении внешнего магнитного поля для формирования компактного тороида в  $\theta$ -пинче или при сжатии плазмы с магнитным полем лайнером. В плазменной астрофизике задачи такого типа возникают при рассмотрении эволюции нейтрального слоя в плазме (что представляет интерес для проблемы солнечных вспышек) и при исследовании тепловых процессов в межгалактической среде.

Дальнейший план изложения следующий. В § 1 рассматриваются особенности процесса остывания плазмы с  $\beta \gg 1$ , приводящие к тому, что эффективная теплопроводность такой плазмы намного больше классической (при локальных кулоновских коэффициентах переноса). Радиационные эффекты при остывании плазмы с большим  $\beta$  рассмотрены в § 2. Там показано, это возрастание объемной мощности потерь на излучение приводит к распространению в плазме радиационной волны охлаждения. В этом случае энергетическое время жизни плазмы пропорционально лишь первой степени ее линейного размера. Такая же радиационная волна описывает и процесс конденсации горячей плазмы на облаках холодного газа, образующегося вследствие тепловой неустойчивости в межгалактической среде. В § 3 и 4 исследуются потери магнитного потока при обра-

щении поля в  $\theta$ -пинче и сжатии плазмы с магнитным полем лайнером. В обоих случаях диффузия магнитного поля характеризуется эффективным коэффициентом магнитной вязкости, не зависящим от частоты столкновений в плазме. В § 5 обращается внимание на то, что тепловые процессы в плазме могут приводить к заметному увеличению скорости диссипации энергии магнитного поля в нейтральном слое. Особенности диффузии тяжелых примесей в плотной плазме, связанные с действием термосилы между ионами разных сортов, описаны в § 6 и 7.

### 1. Особенности остывания и аномальная теплопроводность плазмы с $\beta \gg 1$

Относительная роль теплопроводности и излучения в потерях энергии из плазмы зависит от размеров системы. Очевидно, что при достаточно малых размерах (количественный критерий укажем в дальнейшем) потерями на излучение можно пренебречь и считать, что остывание плазмы определяется ее теплопроводностью. При этом качественное отличие остывания плотной плазмы с  $\beta \gg 1$  от аналогичного процесса в разреженной плазме ( $\beta \ll 1$ ) легко понять из следующих соображений. Запишем простейшее уравнение диффузии магнитного поля в плазме:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} - vB \right), \quad (1.1)$$

где  $\sigma$  — проводимость плазмы, а  $v$  — ее скорость. Здесь и в дальнейшем будем считать магнитное поле направленным вдоль оси  $z$ , а градиенты всех величин (и течение плазмы) — вдоль оси  $x$ . В случае малых значений  $\beta$ , когда тепловая энергия плазмы много меньше энергии магнитного поля, последнее остается практически постоянным при изменении параметров плазмы ( $\delta B/B \sim \beta \ll 1$ ). Поэтому в левой части уравнения (1.1) можно положить  $\partial B/\partial t \approx 0$ , так что скорость плазмы  $v = \frac{c^2}{4\pi\sigma B} \partial B/\partial x$ . Это — обычная диффузия

плазмы поперек магнитного поля. Но так как соответствующий коэффициент диффузии  $D_{\perp} \sim r_{He}^2 \nu_e$  ( $r_{He}$  — ларморовский радиус электронов;  $\nu_e$  — частота их рассеяния при кулоновских столкновениях) в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз меньше температуропроводности плазмы  $\chi_{\perp} \sim r_{Hi}^2 \nu_i$  [17], то можно считать, что при своем остывании плазма с  $\beta \ll 1$  остается неподвижной и плотность ее не меняется. Изменение во времени температуры плазмы имеет при этом простой характер (рис. 1). Потери энергии плазмы происходят за счет понижения ее температуры во все более глубоких слоях. Характерная скорость продвижения такой волны остывания в глубь плазмы  $u_T \sim \chi_{\perp}/R$ , так что энергетическое время жизни в этом случае

$$\tau_E \sim R^2/\chi_{\perp}. \quad (1.2)$$

Теперь представим себе аналогичную картину для плазмы с большим  $\beta$ . Так как интересующие нас тепловые процессы протекают

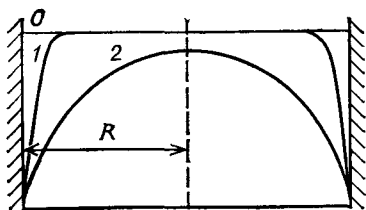


Рис. 1. Изменение во времени профиля температуры плазмы с  $\beta \ll 1$  (0, 1 и 2 — начальный и последующие моменты времени)

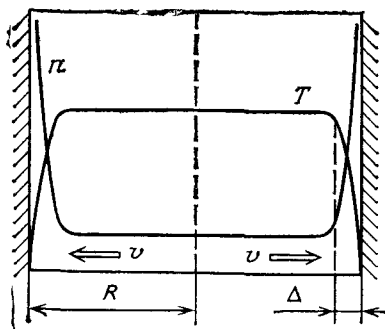


Рис. 2. Профили температуры и плотности, возникающие при остывании плазмы с большим  $\beta$

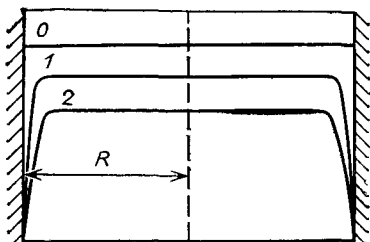


Рис. 3. Временная последовательность профилей температуры для плазмы с  $\beta \gg 1$  (0, 1 и 2 — начальный и последующие моменты времени)

гораздо медленнее гидродинамических, то давление плазмы остается однородным при ее остывании:  $(\partial/\partial x)(nT) \approx 0$ . Поэтому понижение температуры в пристеночном слое плазмы вызывает соответствующее увеличение плотности при течении плазмы от центра к стенкам (рис. 2). Хотя скорость такого расширения плазмы много меньше звуковой, она может (и это будет показано в дальнейшем) существенно превышать  $\chi_{\perp}/R$  — скорость распространения волны остывания в глубь плазмы. Это приводит к тому, что волна остывания «сносится» течением плазмы и уже не может проникнуть в центральные области. Весь перепад температуры происходит теперь в тонком пристеночном слое, а занимающая основной объем горячая плазма остывает адиабатически за счет своего расширения (рис. 3). Большой градиент температуры в пристеночном слое приводит к увеличению потока теплоты на стенку, так что время остывания плазмы оказывается гораздо меньше, чем по оценке (1.2).

Для количественного решения задачи необходимо определить структуру пристеночного слоя. Будем считать, что здесь применимо гидродинамическое описание плазмы на основе уравнений переноса, приведенных в [17], и пользоваться принятыми там обозначениями. Уравнение диффузии магнитного поля (1.1) в плазме с большим  $\beta$  следует дополнить слагаемым, возникающим из-за действия термосилы (эффект Нернста):

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} - vB + \frac{c}{e} \beta_{\Lambda} \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1.3)$$

где  $\beta_{\Lambda}$  — термоэлектрический коэффициент, а плазма считается изотермической, так что  $T_i = T_e = T$ . Как будет видно из дальнейшего, сильное искажение магнитного поля вследствие движения плазмы и эффекта Нернста может приводить к такому усилению магнитного поля в пристеночном слое, что его давление сравнивается с газокINETическим давлением плазмы. Поэтому в уравнении равновесия нужно учесть и давление магнитного поля, хотя в основном объеме плазмы с  $\beta \gg 1$  оно пренебрежимо мало:

$$\frac{\partial}{\partial x} [2nT + B^2/(8\pi)] = 0 \quad (1.4)$$

(здесь  $n = n_e = n_i$  — плотность электронов и ионов водородной плазмы). В тепловом балансе плазмы главную роль играют теплопроводность и конвективный перенос тепла:

$$3 \frac{\partial (nT)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial x} - 5nTv \right), \quad (1.5)$$

а джоулев нагрев и диссипация энергии, определяемая вязкостью, здесь несущественны. Вместе с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nv) = 0 \quad (1.6)$$

уравнения (1.3)–(1.5) образуют полную систему, описывающую остывание плазмы с большим  $\beta$  в магнитном поле. Схема их решения выглядит теперь следующим образом. Из уравнения (1.4) находится плотность плазмы, а из уравнения (1.6) — необходимая для обеспечения нужной плотности скорость течения плазмы. Профили магнитного поля и температуры регулируются уравнениями (1.3) и (1.5), которые нужно решать совместно, так как поперечная теплопроводность плазмы  $\kappa_{\perp}$  сильно зависит от индукции магнитного поля, а последняя, в свою очередь, от неоднородности температуры плазмы. Для дальнейшего существенно, что в пристеночном слое, где имеется большой перепад температуры и плотности, происходит переход от сильно замагниченной ( $\omega_{HT} \gg 1$ ) горячей плазмы к незамагниченной ( $\omega_{HT} \ll 1$ ) холодной плазме ( $\omega_H$  — циклотронная частота;  $\tau$  — время между столкновениями). Входящие же в уравнения (1.3) и (1.5) кинетические коэффициенты  $\sigma$ ,  $\kappa_{\perp}$  и  $\beta_{\Lambda}$  имеют в этих областях совершенно различный вид. Даже приближенные формулы [17], пригодные для любых значений параметра  $\omega_{HT}$ , довольно громоздки. Поэтому воспользуемся простыми модельными выражениями, качественно правильно описывающими поведение коэффициентов переноса плазмы в обоих предельных случаях. Для этого рассмотрим отдельно три области параметров плазмы: область I — относительно горячая плазма с замагниченными ионами:  $(\omega_{HT})_i > 1$ ; область III — холодная незамагниченная плазма, где  $(\omega_{HT})_e < 1$ ; промежуточная область II, где электроны замагничены, а ионы нет. Учитывая, что  $(\omega_{HT})_i = \mu^{1/2} (\omega_{HT})_e$ , где  $\mu \equiv m_e/m_i \ll 1$  — отношение масс электронов и ионов, границы области II записывают так:  $\mu^{1/2} < (\omega_{HT})_i < 1$ . Теперь кинетические коэффициенты плаз-

мы можно представить в следующем виде [17]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{ne^2\tau_e}{m_e}; & \kappa_{\perp} &= \begin{cases} ncT/(eB(\omega_H\tau)_i) & \text{в области I,} \\ ncT/eB & \text{в области II,} \\ ncT(\omega_H\tau)_e/eB & \text{в области III;} \end{cases} \\ & & \beta_{\Lambda} &= \begin{cases} 3/(2(\omega_H\tau)_e) & \text{(I, II),} \\ 3(\omega_H\tau)_e/2 & \text{(III).} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

Выше уже отмечалась важная роль эффекта Нернста в эволюции магнитного поля в плазме с  $\beta \gg 1$ . Уравнение (1.3) удобно интерпретировать как уравнение непрерывности для магнитного поля, где магнитный поток

$$q_H = vB - \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{c}{e} \beta_{\Lambda} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (1.8)$$

Отсюда видно, что эффект Нернста приводит к дополнительному сносу магнитного поля, направленному противоположно градиенту температуры плазмы. Введем скорость этого сноса:

$$V_H \equiv \frac{c}{eB} \beta_{\Lambda} \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Она связана со скоростью тепловой диффузии

$$V_T = \frac{\kappa_{\perp}}{nT} \frac{\partial T}{\partial x}$$

такими соотношениями, следующими из (1.7):

$$V_H = \begin{cases} \frac{3}{2} \mu^{1/2} V_T, & (\omega_H\tau)_i > 1 & \text{(область I);} \\ \frac{3}{2(\omega_H\tau)_e} V_T, & 1 < (\omega_H\tau)_e < \mu^{-1/2} & \text{(область II);} \\ \frac{3}{2} V_T, & (\omega_H\tau)_e < 1 & \text{(область III).} \end{cases} \quad (1.9)$$

Эта связь будет использована в дальнейшем для нахождения индукции магнитного поля.

Для определения скорости остывания плазмы удобно рассмотреть следующую модельную задачу, которую удастся решить точно. Пусть в начальный момент времени однородная горячая плазма с температурой  $T_0$  и плотностью  $n_0$ , находящаяся во внешнем магнитном поле  $B_0$ , приходит в контакт с холодной стенкой, имеющей нулевую температуру (плазма занимает полупространство  $x > 0$ ). В такой задаче отсутствует характерный масштаб длины, поэтому ее решение должно быть автомодельным. Так как дальнейшая эволюция системы связана с теплопроводностью плазмы, то автомодельность имеет диффузионный характер, а автомодельную пере-



менную  $\xi$  можно выразить через температуропроводность горячей плазмы  $\chi_0 = \kappa_{\perp 0} / n_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x / (\chi_0 t)^{1/2}; & T(x, t) &= T_0 T(\xi); & n(x, t) &= n_0 n(\xi); \\ B(x, t) &= B_0 B(\xi); & v(x, t) &= -(\chi_0 t)^{1/2} v(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1.10)$$

[течение плазмы направлено к стенке, так что  $v(x, t) < 0$ ]. Теперь здесь  $T(\xi)$ ,  $n(\xi)$ ,  $B(\xi)$  и  $v(\xi)$  — безразмерные функции, для которых из (1.3) — (1.6) можно получить следующие уравнения:

$$nT + B^2/\beta_0 = 1 + \beta_0^{-1}; \quad (1.11)$$

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dB}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( \frac{4\mu^{1/2}}{\beta_0 \sigma} \frac{dB}{d\xi} + \frac{3}{2} \mu^{1/2} \alpha \frac{dT}{d\xi} + vB \right); \quad (1.12)$$

$$-\frac{3}{2} \xi \frac{d(nT)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( \kappa \frac{dT}{d\xi} + 5nTv \right); \quad (1.13)$$

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dn}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (nv), \quad (1.14)$$

где  $\beta_0 \equiv 16\pi n_0 T_0 / B_0^2 \gg 1$ , но при этом горячая плазма предполагается сильно замагниченной, так что  $(\omega_{H_i} \tau_i)_0 \equiv \delta_0 \gg 1$ . В этих обозначениях  $\sigma = T^{3/2}$ ;

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \begin{cases} n^2 / (B^2 T^{1/2}) & \text{(I);} & BT^{3/2} / n > \delta_0^{-1}; \\ \delta_0 n T / B & \text{(II);} & \mu^{1/2} \delta_0^{-1} < BT^{3/2} / n < \delta_0^{-1}; \\ \mu^{-1/2} \delta_0^2 T^{3/2} & \text{(III);} & BT^{3/2} / n < \mu^{1/2} \delta_0^{-1}; \end{cases} \\ \alpha &= \begin{cases} n / (BT^{3/2}) & \text{(I, II);} \\ \mu^{-1} \delta_0^2 BT^{3/2} / n & \text{(III).} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

В качестве первого шага будем считать  $\beta_0$  бесконечно большим (из полученного решения будет видно, когда необходимо учитывать конечность этой величины). Из (1.11) тогда следует, что  $nT = 1$ , а из (1.13) — постоянство теплового потока, вклад в который дают течение плазмы и теплопроводность:

$$\kappa \frac{dT}{d\xi} + 5v = \text{const} = 5v_0. \quad (1.16)$$

Здесь  $v_0$  — скорость течения горячей плазмы при  $\xi \rightarrow +\infty$ , которая и определяет тепловой поток на стенку и тем самым скорость остывания плазмы. Так как согласно (1.10) скорость течения плазмы  $v \propto \chi_0^{1/2}$ , то темп потерь тепла можно характеризовать некоторой эффективной теплопроводностью плазмы  $\kappa_{\text{ef}}$ , которая, очевидно, равна

$$\kappa_{\text{ef}} = v_0^2 \kappa_{\perp 0}. \quad (1.17)$$

Поскольку  $v_0$  имеет большое значение ( $v_0 \gg 1$ ), такую теплопроводность называют аномальной.

С понижением температуры в пристеночном слое скорость течения плазмы уменьшается, поэтому конвективный тепловой поток существен только в области горячей плазмы с  $T \sim 1$ , а при  $T \ll 1$  главную роль играет теплопроводность, и из (1.16) следует, что

$$\kappa \frac{dT}{d\xi} \approx 5v_0. \quad (1.18)$$

Это уравнение определяет в принципе профиль температуры  $T(\xi)$ , куда величина  $v_0$  входит как неизвестный пока параметр. Толщина пристеночного слоя  $\Delta\xi \propto v_0^{-1}$ . Для нахождения  $v_0$  воспользуемся уравнением непрерывности (1.14). Плотность потока плазмы

$$nv = -\frac{1}{2} \int_0^{\xi} \xi \frac{dn}{d\xi} d\xi$$

(с учетом того, что на стенке, т. е. при  $\xi=0$ , плотность потока равна нулю). Поэтому

$$v_0 = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \xi \frac{dn}{d\xi} d\xi. \quad (1.19)$$

Здесь интеграл в правой части пропорционален  $v_0^{-1}$ , так что, зная решение уравнения (1.18), отсюда можно определить  $v_0$ . Как будет показано ниже, основной вклад в интеграл (1.19) дает область относительно холодной плазмы с температурой  $T \sim T_* \ll 1$ . Это означает, что вещество, приносимое течением горячей плазмы, накапливается в области с  $T \sim T_*$ . Поэтому при  $T > T_*$  плотность потока плазмы можно считать постоянной:

$$nv = \text{const} = v_0, \quad \text{т. е.} \quad v \approx v_0 T, \quad (1.20)$$

а при  $T < T_*$  она быстро падает и обращается в нуль на стенке.

Для определения температуры плазмы в пристеночном слое из уравнения (1.18) нужно знать индукцию магнитного поля. Дополнительный вынос последнего к стенке из-за эффекта Нернста делает решение уравнения (1.12) для магнитного поля очень чувствительным к граничному условию на стенке. Естественно, поэтому, рассмотреть два предельных случая: идеально проводящую и непроводящую стенки. Начнем с последнего, когда индукция магнитного поля на стенке не меняется:  $B(\xi=0) = 1$ . В систему уравнений (1.11)–(1.15) входят два безразмерных параметра:  $\beta_0$  и  $\delta_0$ , разные значения которых удобно представлять как точки на плоскости  $(\beta_0, \delta_0)$  (рис. 4). Здесь можно выделить четыре области (A, B, B, Г) с различной структурой пристеночного слоя. Границы этих областей схематично показаны на рис. 4, а смысл такого разделения будет ясен из дальнейшего изложения (напомним, что нас интересуют только значения  $\beta_0$  и  $\delta_0$ , большие единицы). В области B, где значение  $\beta_0$  достаточно велико, можно пренебречь магнитной вязкостью и, используя введенную ранее скорость сноса магнитного

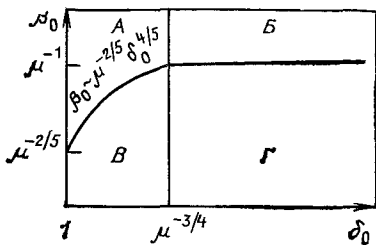


Рис. 4. Разбиение плоскости безразмерных параметров ( $\beta_0$ ,  $\delta_0$ ) на области с различной структурой пристеночного слоя плазмы в случае непроводящей границы

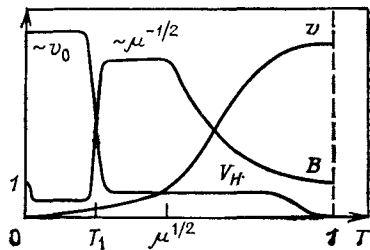


Рис. 5. Профили индукции магнитного поля ( $B$ ), скорости течения плазмы ( $v$ ) и скорости теплового сноса магнитного поля ( $V_H$ ) в случае непроводящей границы при  $\beta_0 > \mu^{-1}$  и  $\delta_0 > \mu^{-3/4}$

поля из-за термоэффекта  $V_H$ , записать (1.12) в виде

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dB}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \{(v + V_H)B\} = dq_H/d\xi. \quad (1.21)$$

Величина  $V_H$  связана со скоростью диффузии тепла  $V_T$  соотношениями (1.9). Но уравнение (1.16) означает, что  $V_T$  есть теперь постоянная, равная  $5v_0$ . Поэтому

$$V_H = \begin{cases} (15/2)\mu^{1/2} v_0 & \text{(I), } T \ll 1; \\ (15/2)\mu^{1/2} v_0 / (\delta_0 B T^{5/2}) & \text{(II)} \\ (15/2) v_0 & \text{(III).} \end{cases} \quad (1.22)$$

Отсюда видно, что выносимый на стенку из-за эффекта Нернста магнитный поток одного порядка с конвективным магнитным потоком из горячей плазмы [ $q_H(\infty) \sim q_H(0) \sim v_0$ ]. В то же время, как это следует из (1.21), изменение магнитного потока

$$\Delta q_H \sim \int \xi \frac{dB}{d\xi} d\xi \sim v_0^{-1}.$$

Тогда можно считать, что  $\Delta q_H \ll q_H$  при достаточно больших  $v_0$ , и находить индукцию магнитного поля из условия постоянства потока  $q_H$ :

$$q_H = (v + V_H) B = v_0. \quad (1.23)$$

Из соотношений (1.20) и (1.22) для скоростей  $v$  и  $V_H$  и (1.23) следует, что при  $T \gg \mu^{1/2}$  скорость  $v \gg V_H$ , поэтому там магнитное поле заморожено в плазму:  $B \approx n = T^{-1}$ . Эффект Нернста становится существенным при  $T \sim \mu^{1/2}$ , а затем, с дальнейшим понижением температуры, он играет главную роль в выносе магнитного поля ( $V_H \gg v$  при  $T \ll \mu^{1/2}$ ). В результате профиль магнитного поля приобретает вид, показанный на рис. 5. При  $T \ll \mu^{1/2}$  поле  $B = (2/15)\mu^{-1/2}$  в области I и  $B = 2/15$  в области III. При этом нижняя

(по температуре) граница области I совпадает с верхней границей области III:  $T = T_1 = (15/2)^{2/5} \mu^{1/5} \delta_0^{-2/5}$ , так что при  $T = T_1$  происходит скачок магнитного поля, а область II фактически отсутствует. Скачок индукции поля возникает также и у стенки ( $\xi = 0$ ), где она меняется от  $B = 2/15$  до  $B = 1$  (в предположении, что замагниченность горячей плазмы  $\delta_0$  достаточно велика, так что  $T_1 \ll \mu^{1/2}$ , т. е.  $\delta_0 \gg \mu^{-3/4}$ ). Как видно из полученного решения, в пристеночном слое происходит усиление индукции магнитного поля до  $B_{\max} \sim \mu^{-1/2}$ . Таким образом, давлением магнитного поля можно пренебречь и считать  $nT = 1$ , если  $B_{\max} \ll \beta_0^{1/2}$ , т. е.  $\beta_0 \gg \mu^{-1}$ .

Учет магнитной вязкости в уравнении (1.12) приводит, конечно, к сглаживанию профиля магнитного поля. Однако при условии  $\beta_0 \gg \mu^{-1}$ , когда давление магнитного поля в пристеночном слое остается меньше давления плазмы, скачки индукции магнитного поля размываются слабо. Для доказательства запишем аналог уравнения (1.23) при учете диффузии магнитного поля:

$$\frac{4\mu^{1/2}}{\beta_0 T^{3/2}} \frac{dB}{d\xi} + V_H B = v_0 \quad (1.24)$$

(при  $T \ll \mu^{1/2}$  снос поля течением плазмы несуществен) Используя (1.15), (1.18) и (1.22), это уравнение для области II можно записать так:

$$\frac{20\mu^{1/2} B}{\beta_0 \delta_0 T^{3/2}} \frac{dB}{dT} + \frac{15\mu^{1/2}}{2\delta_0 T^{5/2}} = 1,$$

откуда

$$B^2 = \left( \frac{2}{15} \right)^2 + \frac{3}{2} \beta_0 \left\{ \frac{1}{5} \left[ \left( \frac{T}{T_1} \right)^{5/2} - 1 \right] - \frac{1}{2} \ln \frac{T}{T_1} \right\}.$$

Теперь видно, что возрастание индукции магнитного поля от  $B = 2/15$  в области III до  $B = (2/15)\mu^{-1/2}$  в области I происходит в узком интервале температур  $\Delta T \sim (\beta_0 \mu)^{-1/2} T_1 \ll T_1$ . Такой изотермический скачок индукции магнитного поля аналогичен известному в газодинамике явлению изотермического скачка плотности в ударных волнах [18]. Для возникновения последнего необходимо выполнение двух условий: во-первых, вязкость газа должна быть мала по сравнению с его теплопроводностью, во-вторых, число Маха должно превышать некоторое критическое значение. В нашем же случае замагниченной плазмы магнитная вязкость должна быть много меньше теплопроводности плазмы (что и выполняется при  $T \sim T_1$ , если  $\beta_0 \gg \mu^{-1}$ ) и параметр замагниченности горячей плазмы  $\delta_0$  должен быть достаточно велик ( $\delta_0 > \mu^{-3/4}$ ).

Решение уравнения (1.24) в области III с граничным условием на стенке  $B(T=0) = 1$  имеет вид

$$B = \frac{1}{15} \left[ 2 + 13 \exp \left( - \frac{3}{40} \beta_0 \mu^{-1} \delta_0^2 T^5 \right) \right],$$

так что при  $\beta_0 \gg 1$  скачок поля на стенке остается узким, поскольку  $B \approx 2/15$  уже при  $T \ll T_1 \sim \mu^{1/5} \delta_0^{-2/5}$ .

Определив индукцию магнитного поля и тем самым теплопроводность плазмы  $\kappa(B, T)$ , найдем теперь из (1.8) профиль темпе-

ратуры в пристеночном слое. Стартуя от стенки ( $\xi=0$ ) в области III, т. е. при  $T < T_1$ , получаем

$$\xi = \frac{2}{35} \mu^{-1/2} v_0^{-1} \delta_0^2 T^{7/2}.$$

Затем при  $T > T_1$  увеличение индукции магнитного поля в  $\mu^{-1/2}$  раз сильно подавляет теплопроводность плазмы. Поэтому слой с температурой  $T_1 < T < \mu^{1/2}$  оказывается относительно узким:

$$\Delta \xi \ll \xi_1 = \frac{2}{35} \mu^{-1/2} v_0^{-1} \delta_0^2 T_1^{7/2}.$$

При дальнейшем повышении температуры ( $T > \mu^{1/2}$ ) из (1.16) и (1.20) следует, что

$$\xi = \xi_1 + (2/5) v_0^{-1} \operatorname{arctg} T^{1/2}$$

(как и должно быть, горячей плазме с  $T \rightarrow 1$  соответствует  $\xi \rightarrow +\infty$ ). Зная зависимость  $\xi(T)$ , можно из условия (1.19) найти  $v_0$  — усиление теплового потока на стенку:

$$v_0 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi \frac{dn}{d\xi} d\xi = -\frac{1}{2} \int_0^1 \xi \frac{dn}{dT} dT = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi(T) \frac{dT}{T^2}.$$

Нетрудно проверить, что основной вклад в этот интеграл дает область с температурой  $T \sim T_1$  (это и есть введенная ранее температура «накопления» плазмы  $T_*$ , а  $v_0 = (3\delta_0/10)^{1/2}$ ). Согласно (1.17) это означает, что эффективная теплопроводность плазмы [19]

$$\kappa_{\text{ef}} = \frac{3\delta_0}{10} \frac{n_0 c T_0}{e B_0 (\omega_H i^{\text{v}})_0} = \frac{3n_0 c T_0}{10 e B_0} \quad (1.25)$$

в этом случае порядка так называемой бомовской теплопроводности.

Полученное решение справедливо при условии выполнения неравенств  $\beta_0 \gg \mu^{-1}$ ,  $\delta_0 \gg \mu^{-3/4}$ . Последнее из них означает, что при натекании горячей плазмы на стенку снос магнитного поля из-за эффекта Нернста «включается» раньше, чем происходит «накопление» плазмы ( $T_* \sim T_1 < \mu^{1/2}$ ). Это и позволяло считать магнитный поток неизменным ( $q_H = \text{const} = v_0$ ). Рассмотрим теперь случай рис. 4, А, когда  $1 \ll \delta_0 \ll \mu^{-3/4}$ , но значение  $\beta_0$  по-прежнему достаточно велико (так что  $V_{\text{max}}^2 / \beta_0 \ll 1$ ). Как и раньше, в области III магнитное поле однородно и его индукция равна  $2/15$ , так как там  $V_H \gg v$ . Не меняется и граница этой области:  $T < T_1$ . При переходе в область II уже при  $T \sim T_1$  быстрый рост индукции магнитного поля приводит согласно (1.22) к уменьшению  $V_H$  ( $V_H \sim v$ ). Так как в этой же области происходит накопление плазмы, то при  $T \sim T_1$  скорость  $v \sim \xi$ , поэтому в уравнении (1.21) все слагаемые становятся одного порядка. Упрощающим обстоятельством является то, что увеличение магнитного поля сужает соответствующую область и  $\xi = \text{const} = \xi_1$  при  $T \geq T_1$ . Тогда из (1.14) при  $T \geq T_1$  следует, что

$$nv = -\frac{1}{2} \int_0^T \xi \frac{dn}{dT} dT = \frac{1}{2} \int_0^1 \xi(T) \frac{dT}{T^2} +$$

$$+ \frac{\xi_1}{2} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) = \frac{7}{10T_1} \xi_1 - \frac{\xi_1}{2T}; \quad v = v_0 T - \xi_1/2.$$

Подставляя это выражение для скорости течения плазмы в уравнение (1.21) и считая  $\xi = \xi_1$ , находим индукцию магнитного поля:

$$B \approx T^{-1} \left( 1 - T_1^{5/2}/T^{5/2} \right). \quad (1.26)$$

Как видно, при  $T \gg T_1$  магнитное поле заморожено в плазму. Хотя профиль температуры в этом случае (при  $T > T_1$ ) и отличается от полученного ранее, значение  $v_0$ , очевидно, не изменяется. Таким образом, при всех  $\delta_0 \gg 1$  эффективная теплопроводность плазмы порядка бомовской.

Этот результат справедлив и в том случае, когда необходимо учитывать давление магнитного поля в (1.11) и, следовательно, магнитную вязкость в (1.12). Рассмотрим вначале решение при сильной замагниченности плазмы, когда  $\delta_0 \gg \mu^{-3/4}$ . При этом магнитное давление становится существенным, если  $\beta_0 \leq \mu^{-1}$  (область  $\Gamma$  на рис. 4). Хотя теперь давление плазмы  $nT$  уже не постоянно, оно отличается от единицы, как будет видно из дальнейшего, только в узком слое. Поэтому можно, как и раньше, использовать условие постоянства потока теплоты (1.18), которое вместе с уравнением  $q_n = v_0$  позволяет определить индукцию магнитного поля и плотность плазмы. В области III, где  $B = 2/15$ , решение, очевидно, остается прежним. При  $T > T_1$  в области II из условия  $q_n = v_0$  получаем следующее уравнение:

$$\frac{T_1^{5/2}}{3T^{3/2} (nT)} \frac{d}{dT} \left( \frac{B^2}{\beta_0} \right) = 1 - T_1^{5/2}/T^{5/2}, \quad (1.27)$$

решение которого при учете (1.11) имеет вид

$$nT = (T/T_1)^3 \exp \left[ (6/5) \left( 1 - T^{5/2}/T_1^{5/2} \right) \right]. \quad (1.28)$$

Отсюда следует, что при  $T > T_1$  давление плазмы быстро падает до значений  $nT \ll 1$ , а индукция магнитного поля становится равной  $\beta_0^{1/2}$ . Решение (1.28) справедливо до  $T = T_2 \sim T_1 \ln(\beta_0 \mu)^{-1}$  — границы области II. В области I ( $T > T_2$ ) вместо (1.28) получаем, что

$$nT = \varepsilon / \left[ 1 - (T_2/T)^{5/4} \right]; \quad \varepsilon = \frac{15}{2} (\beta_0 \mu)^{1/2} \ll 1, \quad (1.29)$$

т. е. при  $T \gg T_2$  давление плазмы постоянно и равно  $nT = \varepsilon$ . Это имеет следующий смысл. Из постоянства теплового потока (1.18) теперь следует, что скорость диффузии теплоты  $V_T = 5v_0/(nT)$ , поэтому скорость теплового сноса магнитного поля равна согласно (1.9)  $V_H = (15/2) \mu^{1/2} v_0/(nT)$  и при  $B = \beta_0^{1/2}$ ,  $nT = \varepsilon$  обеспечивает необходимый магнитный поток.  $q_n = V_H B = v_0$ . Соотношение (1.29) остается верным до температуры  $T \sim \mu^{1/2}$ , где скорость течения плазмы  $v = v_0/n$  сравнивается с  $V_H$ . При  $T \gg \mu^{1/2}$  магнитное поле заморожено в плазму.  $B = n$ , так что в интервале  $\mu^{1/2} \ll T \ll \beta_0^{-1/2}$  индукция  $B = n = \beta_0^{1/2}$ , а при  $T > \beta_0^{-1/2}$ ,  $B = n = T^{-1}$ . В этом случае главный вклад в интеграл (1.19), определяющий  $v_0$ , дает, как и раньше, область температур  $T \sim T_1$ . Поэтому эффективная теплопроводность здесь отличается лишь численным множителем от значения, даваемого (1.25).

Если замагниченность горячей плазмы такова, что параметр  $1 \ll \delta_0 \approx \mu^{-3/4}$ , то эффекты, связанные с давлением магнитного поля, начинают проявляться при

$\beta_0 \leq T_1^{-2} \sim \mu^{-2/5} \delta_0^{4/5}$  (область  $B$  на рис. 4). Решение для этого случая следующее. Вмороженность магнитного поля в плазму сохраняется до температур  $T > T_1$ , поэтому  $B = n = T^{-1}$  до  $T \sim \beta_0^{-1/2}$ . Затем  $B = n = \beta_0^{1/2}$  при  $T < \beta_0^{-1/2}$ , и давление плазмы здесь много меньше давления магнитного поля. При  $T \sim T_1$  индукция магнитного поля спадает до значения  $B = 2/15$ , а  $nT$  увеличивается до единицы. При  $T < T_1$  решение остается прежним. Соответственно не меняется и порядок эффективной теплопроводности плазмы.

Таким образом, в случае непроводящей стенки эффективная теплопроводность плазмы при  $\beta_0 \gg 1$  и  $\delta_0 \gg 1$  порядка бомовской. Причиной этого является быстрый вынос магнитного поля к стенке благодаря эффекту Нернста, уменьшающий индукцию магнитного поля в немагнитной пристеночной плазме примерно до единицы.

Существенно иной вид имеет решение этой задачи в случае идеально проводящей стенки, не пропускающей магнитный поток [20]. Теперь магнитное поле, выносимое к стенке течением горячей плазмы, накапливается в пристеночной области. В результате здесь происходит усиление индукции магнитного поля и возрастание тепловых потерь из плазмы выражено гораздо слабее.

Рассмотрим это решение подробнее. Гранчное условие на стенке

$$q_H(\xi = 0) = \left( \frac{4\mu^{1/2}}{\beta_0 \sigma_{\perp}} \frac{dB}{d\xi} + V_H B + vB \right)_{\xi=0} = 0$$

означает, что тепловой снос магнитного поля должен компенсироваться направленным противоположно диффузионным потоком. Поэтому, в отличие от случая непроводящей стенки, магнитную вязкость (и давление магнитного поля) теперь необходимо учитывать при сколь угодно больших значениях параметра  $\beta_0$ . Так как скорость  $V_H$  возрастает по направлению от горячей плазмы к стенке и становится в пристеночном слое больше скорости течения плазмы  $v$ , то условие компенсации

$$\frac{4\mu^{1/2}}{\beta_0 T^{3/2}} \frac{dB}{d\xi} + V_H B = 0 \quad (1.30)$$

должно выполняться не только на самой стенке, но и во всей области, где  $V_H > v$ . Это можно пояснить следующим образом. Течение горячей плазмы создает потоки вещества и магнитного поля к стенке. Из уравнения непрерывности (1.14) следует, что в области «накопления» плазмы ( $T \sim T_*$ )  $\xi \sim v$ , а при  $T > T_*$  скорость  $v > \xi$  и поток вещества остается постоянным. Вынос магнитного поля к стенке происходит со скоростью  $v + V_H$ . Поэтому здесь есть две возможности. Первая состоит в том, что в области накопления магнитного поля (обозначим ее температуру  $T_*$ )  $V_H \gg v$ . Так как при этом  $V_H \gg \xi$ , то из (1.11) видно, что при  $T < T_*$  магнитное поле должно удовлетворять уравнению (1.30), а при  $T > T_*$  имеет место постоянный поток магнитного поля  $V_H B = v_0$ . Оказывается, однако, что таких решений не существует. Связано это с тем, что индукция магнитного поля в пристеночном слое ограничена сверху величиной  $B_{\max} = B_0^{1/2}$ ; это следует просто из баланса давлений (1.11). Следовательно, остается вторая возможность. В этом случае магнитное поле вморожено в плазму там, где  $V_H < v$ , а при  $V_H > v$  выполняется условие компенсации (1.30). Его можно переписать в следующем виде:

$$\frac{4\mu^{1/2}}{\beta_0 T^{3/2}} \frac{dB}{dT} + \frac{3}{2} \mu^{1/2} \alpha = 0. \quad (1.31)$$

Так как величина  $\alpha$  имеет разные зависимости от  $n$ ,  $T$  и  $B$  в различных областях [см. (1.15)], рассмотрим сначала решение этого уравнения при замагниченных электронах (области I и II). Учитывая (1.11), получаем, что

$$nT^{1/4} = \text{const.} \quad (1.32)$$

Это хорошо известный результат для стационарной неоднородной плазмы [21]. Отсюда следует, что давление плазмы падает с уменьшением температуры ( $nT \sim \sim T^{3/4}$ ), поэтому вблизи стенки образуется область буферного магнитного поля с  $B = \beta_0^{1/2}$  и текущим значением параметра  $\beta \ll 1$ . Решение (1.32) нарушается при очень низких температурах, когда плазма уже не замагничена (область III). Из (1.31) и (1.11) при учете (1.15) получаем, что

$$nT = \left( \gamma^2 + \frac{3}{10} \mu^{-1} \beta_0 \delta_0^2 T^5 \right)^{1/2},$$

где  $\gamma \ll 1$  — давление плазмы на стенке. Это решение справедливо при  $T < T_1 \sim \sim \gamma^{2/5} \mu^{1/5} \beta_0^{-1/5} \delta_0^{-2/5}$ , происходит замагничивание электронов. Поэтому во всей области III давление плазмы  $nT \sim \gamma$ .

Теперь можно представить себе полное решение задачи. Начнем со случая достаточно больших значений параметров  $\delta_0$  и  $\beta_0$ , когда  $\delta_0 > \mu^{-3/4}$ , а  $\beta_0 > \mu^{-1}$ . Тогда при  $T > \mu^{1/2} V_H < v$  и магнитное поле заморожено в плазму:  $B = n = T^{-1}$ . При  $T \sim \mu^{1/2}$  скорость теплового сноса магнитного поля  $V_H$  сравнивается со скоростью течения плазмы, поэтому при  $T < \mu^{1/2}$  справедливо решение (1.32) и  $nT_1 \sim \sim \mu^{-3/8} T^{3/4}$ , а индукция магнитного поля  $B = \beta_0^{1/2}$ . Падение давления плазмы происходит до  $T = T_1 \sim \mu^{1/4} \delta_0^{-4/7} \beta_0^{-2/7}$ , где плазма размагничивается. При  $T \leq T_1$

$$nT \sim \gamma \sim (\mu^{9/28} \delta_0^3 \beta_0^{3/14})^{-1} \ll 1.$$

Плазма и магнитное поле «накапливаются» в области с  $T \sim \mu^{1/2}$ , а скорость течения горячей плазмы  $v_0 \sim \mu^{-1/8}$ . Поэтому эффективная теплопроводность плазмы в этом случае

$$\kappa_{\text{ef}} \sim v_0^2 \kappa_{\perp 0} \sim (m_i/m_e)^{1/4} \kappa_{\perp 0}. \quad (1.33)$$

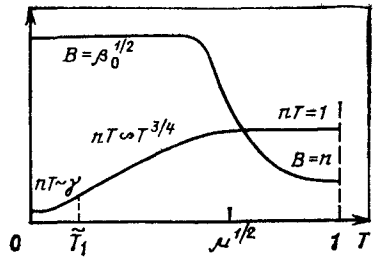
Интересно отметить, что в случае идеально проводящей стенки эффект Нернста «работает» не на возрастание эффективной теплопроводности плазмы (как это было при непроводящей стенке), а на ее уменьшение, так как усиливает индукцию магнитного поля вблизи стенки. Качественная картина пристеночного слоя у идеально проводящей стенки изображена на рис. 6.

Выражение (1.33) для эффективной теплопроводности плазмы получено при условии, что тепловой снос магнитного поля становится существенным (при переходе от горячей плазмы к стенке) раньше, чем магнитное давление ( $\beta_0 > \mu^{-4}$ ) и размагничивание ионов ( $\delta_0 > \mu^{-3/4}$ ). Если же одно из этих неравенств не выполняется, то «накопление» плазмы и поля происходит в области температур, где эффект Нернста и диффузия магнитного поля не играют роли. Поэтому там магнитное поле еще заморожено в плазму и становятся справедливыми оценки  $\kappa_{\text{ef}}$ , полученные в предположении точной замороженности поля [22].

Рассмотрим, например, случай, когда  $\beta_0$  велико, но  $\delta_0 < \mu^{-3/4}$ . Решение здесь получается следующим. Во всей области I, где  $T > T_2 = \delta_0^{-2/3}$ , поле заморожено в плазму. «Накопление» поля и плазмы происходит при  $T \sim T_2$ . Поэтому при



Рис. 6. Профили давления плазмы ( $nT$ ) и индукции магнитного поля ( $B$ ) в случае идеально проводящей границы при  $\beta_0 > \mu^{-1}$  и  $\delta_0 > \mu^{-3/4}$



$T < T_2$  в области II поток вещества и поля уменьшается по закону  $\nu v = Bv \sim \delta_0 T / v_0$ , т. е.  $v \sim \delta_0 T^2 / v_0$ , где  $v_0 \sim \delta_0^{1/4}$ . В то же время скорость теплового сноса поля в области II  $V_H \sim \mu^{1/2} v_0 / \delta_0 T^{3/4}$  и сравнивается с  $v$  при  $T \sim \mu^{1/2} \delta_0^{-10/11}$ . Следовательно, выше этой температуры поле еще заморожено в плазму:  $B = n = T^{-1}$ , а при более низких температурах  $B = \beta_0^{1/2}$  и давление плазмы падает по закону (1.32). Если же плазма сильно замагничена, но  $\beta_0 < \mu^{-1}$ , то «накопление» плазмы и поля происходит при  $T \sim \beta_0^{-1/2}$ , где давление замороженного магнитного поля сравнивается с давлением плазмы. В этом случае  $v_0 \sim \beta_0^{1/4}$  и при  $T < \beta_0^{-1/2}$  сначала еще есть замороженность, так что  $B = n = \beta_0^{1/2}$ , а затем вступает в действие тепловой снос поля и выполняется условие (1.32). В общем виде выражение для эффективной теплопроводности плазмы в случае идеально проводящей стенки можно записать так:

$$\kappa_{\text{ef}} \sim \kappa_{\perp 0} \min \left\{ \delta_0^{2/5}, \beta_0^{1/4}, \mu^{-1/4} \right\}. \quad (1.34)$$

Описанные выше автомодельные решения справедливы, строго говоря, только для полубесконечной плазмы. Рассмотрим теперь, процесс остывания плазменного столба с конечным радиусом  $R$ . Из уравнения теплового переноса

$$3 \frac{\partial (nT)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left( \kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial r} - 5nTv \right)$$

видно, что так как его левая часть при  $\beta \gg 1$  не зависит от  $r$ , то поток тепла

$$q_r = \kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial r} - 5nTv \sim r.$$

Поскольку весь перепад температуры происходит в тонком пристеночном слое, толщина которого  $\Delta \ll R$  (см. рис. 3), то здесь можно считать, что  $q_r \approx \text{const}$ . Учитывая, что скорость плазмы вблизи стенки мала, так что главную роль здесь играет теплопроводность, запишем это условие в виде

$$q_r = \kappa_{\perp} \partial T / \partial r = \alpha n_r \chi_{\perp}^{(r)} T_r / R, \quad (1.35)$$

где  $n_r$ ,  $\chi_{\perp}^{(r)}$  и  $T_r$  — плотность, температуропроводность и температура горячей однородной плазмы в центре системы (см. рис. 3), а  $\alpha(t)$  — некоторый (пока неизвестный) коэффициент. Задача состоит в том, чтобы найти, как меняются во времени величины  $n_r(t)$  и  $T_r(t)$  (их начальные значения при  $t=0$  обозначим  $n_0$  и  $T_0$ , а начальное магнитное поле —  $B_0$ ). Из уравнения (1.35) можно определить структуру пристеночного слоя, причем если температуру и плотность изме-

рять в единицах  $T_r$  и  $n_r$ , то в каждый момент профили  $n(r)$  и  $T(r)$  будут иметь одинаковый вид, отличающийся лишь пространственным масштабом. Последний, очевидно, пропорционален  $\alpha^{-1}$ , а вся толщина пристеночного слоя  $\Delta \sim R/\alpha$ . (Поэтому изображенная на рис. 3 картина остывания плазмы справедлива, если  $\alpha \gg 1$ ). Так как горячая плазма остывает при этом за счет своего адиабатического расширения, то  $p/n_T = \text{const}$ . Считая показатель адиабаты  $\gamma = 5/3$ , получаем, что

$$n_r = n_0 (p/p_0)^{3/5}; \quad T_r = T_0 (p/p_0)^{2/5}; \quad B_r = B_0 n_r/n_0 = B_0 (p/p_0)^{3/5} \quad (1.36)$$

(последнее равенство следует из условия вмороженности магнитного поля в горячую плазму). Как и раньше, важную роль здесь играет число частиц в пристеночном слое  $N_\Delta$ . Его можно записать в таком виде:

$$N_\Delta = \psi n_r \pi R^2 / \alpha, \quad (1.37)$$

где  $\psi$  — коэффициент, определяемый из решения уравнения (1.35). Теперь можно записать условия баланса для энергии горячей плазмы и числа частиц в пристеночном слое, которые и регулируют временную эволюцию системы:

$$\frac{d}{dt} (\pi R^2 \cdot 3p) = -2\pi R q_T = -2\pi \alpha p \chi_\perp^{(r)}; \quad (1.38)$$

$$\frac{dN_\Delta}{dt} = \frac{d}{dt} (\psi n_r \pi R^2 / \alpha) = 2\pi R n_r v_r |_{r=R} = 2\pi n_r \alpha \chi_\perp^{(r)} / 5. \quad (1.39)$$

При получении уравнения (1.39) учтено, что скорость, с которой горячая плазма втекает в пристеночный слой,  $v_r |_{r=R} = q_T / (5p) = \alpha \chi_\perp^{(r)} / (5R)$ . Здесь естественным образом выделяются две стадии процесса остывания горячей плазмы: начальная, когда относительные потери энергии еще невелики, и конечная, когда запас энергии в плазме уже мал по сравнению с исходным. На первой стадии можно считать параметры горячей плазмы постоянными и равными начальным:  $n_r = n_0$ ,  $T_r = T_0$ ,  $B_r = B_0$ ;  $\psi(n_r, T_r, H_r) = \psi_0$ . Тогда из уравнения (1.39) получаем, что

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{2\chi_{\perp 0} \alpha}{5\psi_0 R^2}, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = \left( \frac{5\psi_0}{t\chi_{\perp 0}} \right)^{1/2} \frac{R}{2}. \quad (1.40)$$

Отсюда видно, что на этой стадии остывания плазмы поток теплоты  $q_T$  из (1.35) вообще не зависит от радиуса плазмы  $R$  и пропорционален  $t^{-1/2}$  (а толщина пристеночного слоя соответственно пропорциональна  $t^{1/2}$ ). Поэтому это есть не что иное, как построенное выше автомодельное решение уравнений (1.10) — (1.14). Входящий сюда коэффициент  $\psi$ , определяемый структурой пристеночного слоя, как было показано, сильно зависит от граничного условия для магнитного поля. В случае, например, непроводящей стенки из сравнения формул (1.25), (1.35) и (1.40) легко получить, что

$$\psi = 6 (\omega_{Hi} \tau_i)_r. \quad (1.41)$$

Энергия, теряемая плазмой к моменту времени  $t$ , очевидно, равна

$$\Delta \mathcal{E} = 2\pi R \int_0^t q_T dt \approx 2\pi p_0 \chi_{\perp 0} \int_0^t \alpha dt = 2\pi p_0 R \sqrt{5\chi_{\perp 0} t (\omega_{Hi} \tau_i)_0}$$

и становится сравнима с начальной тепловой энергией плазмы  $\mathcal{E}_0 = 3\pi R^2 p_0$

при

$$t \approx \tau_E \sim R^2/\chi_{\perp 0} (\omega_{Hi}\tau_i)_0 \sim R^2/\chi_{\text{эф}}. \quad (1.42)$$

К этому моменту времени  $\alpha$  становится порядка  $(\omega_{Hi}\tau_i)_0 \gg 1$ , а число частиц в пристеночном слое  $N_{\Delta} \sim \pi R^2 n_0$  — порядка полного числа частиц в горячей плазме (последнее равенство очевидно и заранее, так как при адиабатическом расширении энергия плазмы уменьшается вдвое при таком же, по порядку, изменении ее плотности).

Таким образом, уравнения (1.10)—(1.14) описывают остывание плазмы при  $t \ll \tau_E$ . Однако автомодельный характер процесса сохраняется и при  $t \gg \tau_E$ , меняется лишь зависимость от времени характерного пространственного масштаба [она становится более сложной, чем (1.40)]. Решение соответствующих уравнений (1.36), (1.38), (1.39) и (1.41), справедливое при любых  $t$ , можно найти лишь численным их интегрированием. Но ситуация сильно упрощается, если интересоваться конечной стадией остывания плазмы, когда  $t \gg \tau_E$ . В этом случае число частиц в пристеночном слое  $N_{\Delta}$  почти не меняется, так как там уже сосредоточена практически вся плазма. Поэтому

$$N_{\Delta} = \psi n_r \pi R^2 / \alpha = 6 (\omega_{Hi}\tau_i)_r n_r \pi R^2 / \alpha = \text{const},$$

так что  $\alpha \propto n_r (\omega_{Hi}\tau_i)_r \propto B_r T_r^{3/2} \propto p^{6/5}$  [здесь использованы соотношения (1.36)]. В свою очередь, температуропроводность горячей плазмы  $\chi_{\perp}^{(r)} \sim r_{Hi}^r v_i \propto n_r^{-1} (B_r^2 T_r^{1/2}) \propto p^{-4/5}$ . После этого из уравнения (1.38) следует, что  $dp/dt \propto p^{7/5}$ , откуда получается следующий закон изменения параметров горячей плазмы при  $t \gg \tau_E$ :

$$p_r \sim p_0 (t/\tau_E)^{-5/2}; \quad n_r \sim n_0 (t/\tau_E)^{-3/2}; \quad T_r \sim T_0 (t/\tau_E)^{-1}. \quad (1.43)$$

## 2. Радиационная волна остывания в плотной замагниченной плазме

Перейдем теперь к радиационному охлаждению горячей плазмы с большим  $\beta$ , находящейся в контакте с холодной стенкой. Особенность здесь состоит в том, что при постоянном давлении плазмы объемная мощность излучения резко возрастает в холодном пристеночном слое. Так, для тормозного излучения  $Q_{\text{рад}} \propto n^2 T^{1/2}$  и растет как  $T^{-3/2}$  с уменьшением температуры (а для рекомбинационного излучения, которое становится существенным при  $T \lesssim 30$  эВ,  $Q_{\text{рад}} \propto n^2 T^{-1/2} \propto T^{-5/2}$  и рост мощности излучения происходит еще сильнее). Поскольку для термоядерной плазмы с температурой  $T \sim 10^4$  эВ даже для D—T-смеси время радиационного остывания  $\tau_{\text{рад}} = 3nT/Q_{\text{рад}}$  всего лишь на порядок больше необходимого для УТС времени удержания плазмы, следующего из критерия Лоусона ( $\tau_L = 10^{14}/n$ ), то вопрос о радиационных потерях обсуждался уже в первых работах по стеночному удержанию плотной плазмы [23, 24].

Картина остывания горячей плазмы, когда энергетические потери определяются излучением из тонкого пристеночного слоя, выглядит следующим образом. Слой плазмы вблизи стенки, имеющий низкую температуру, быстро остывает в результате излучения и сжимается (так как давление плазмы должно оставаться однород-

ным). Теплопроводность приводит к отбору теплоты у следующего слоя плазмы, который остывает, сжимается и т. д. Таким образом, от стенки к горячей плазме распространяется волна остывания [25]. Перед волной имеется горячая плазма с температурой  $T_0$ , плотностью  $n_0$  и магнитной индукцией  $B_0$ , а за волной — «остывшая» плазма с некоторой низкой температурой  $T_x \ll T_0$ . Значение  $T_x$  может определяться, например, тем, что при низких температурах (и соответственно больших плотностях) излучение плазмы становится запертым. Конкретное значение  $T_x$  несущественно, так как все характеристики волны остывания не зависят от этой величины. Как и в предыдущем случае (см. § 1), горячая плазма остывает в результате адиабатического расширения. Отличие состоит в том, что там поступающий в пристеночный слой конвективный тепловой поток передавался на стенку теплопроводностью, а в данном случае его энергия излучается из пристеночного слоя.

Для дальнейшего удобно перейти в систему отсчета, связанную с волной, где все величины не зависят от времени. Введя характерное время радиационного остывания горячей плазмы  $\tau_0 = 3n_0 T_0 / Q_{r0}$ , запишем основные уравнения (1.3)–(1.6), добавив в уравнение (1.5) потери на излучение, в безразмерных переменных  $y = x / (\chi_0 \tau_0)^{1/2}$ ;  $u = -v (\tau_0 / \chi_0)^{1/2}$ ; ( $\chi_0$  — температуропроводность горячей плазмы). Плотность, температура и магнитная индукция измеряются соответственно в единицах  $n_0$ ,  $T_0$  и  $B_0$ . В результате из (1.3)–(1.6) получаем:

$$nT = 1; \quad (2.1)$$

$$nu = u_0; \quad (2.2)$$

$$\frac{d}{dy} \left( \kappa \frac{dT}{dx} + 5u \right) = f(T), \quad f(T) = Q_r / Q_{r0}; \quad (2.3)$$

$$uB + \frac{3}{2} \mu^{1/2} \alpha \frac{dT}{dy} = u_0. \quad (2.4)$$

Эти уравнения записаны в приближении  $\beta_0 \rightarrow \infty$ , что позволяет пренебречь давлением магнитного поля и магнитной вязкостью плазмы. Безразмерные теплопроводность  $\kappa$  и термоэлектрический коэффициент  $\alpha$  задаются формулами (1.15);  $u_0$  здесь — безразмерная скорость течения горячей плазмы. Такая постановка задачи имеет смысл, если полные радиационные потери определяются излучением из переходного слоя, поэтому излучением горячей и «остывшей» плазмы можно пренебречь, т. е. формально считать, что  $f(1) = f(0) = 0$ . Как следует из (2.3), выражение для теплового потока в плазме  $q_r$ , состоящего из теплопроводного и конвективного слагаемых, можно представить в виде

$$q_r = \kappa \frac{dT}{dy} + 5u_0 T = 5u_0 - \int_y^\infty f dy = 5u_0 - \int_T^1 f \frac{dy}{dT} dT, \quad (2.5)$$

так что величина  $u_0$  связана с излучением из переходного слоя

соотношением

$$u_0 = \frac{1}{5} \int_0^1 f \frac{dy}{dT} dT. \quad (2.6)$$

Основной вклад в этот интеграл дает, как будет показано ниже, область холодной плазмы с  $T \sim T_* \ll 1$ . Поэтому из (2.5) следует, что при  $T \gg T_*$  излучение можно не учитывать и считать тепловой поток постоянным:

$$q_T = \kappa dT/dy + 5u_0 T = 5u_0,$$

так что при  $T_* \ll T \ll 1$ , когда конвективный вклад в тепловой поток мал:

$$q_T \approx \kappa dT/dy = 5u_0. \quad (2.7)$$

Соотношения (2.4) и (2.7) позволяют найти индукцию магнитного поля. Действительно, из (2.7) при условии (2.1) следует постоянство скорости диффузии теплоты:  $V_T = 5u_0$ . Поэтому, используя введенную выше скорость теплового сноса магнитного поля  $V_H$  и равенства (1.9), из (2.4) получаем

$$B = \left( T + \frac{15}{2} \mu^{1/2} \right)^{-1}; \quad T > T_1; \quad B = 2/15; \quad T < T_1; \quad (2.8)$$

$$T_1 = (15 \mu^{1/2} / 2 \delta_0)^{2/3}.$$

Как и ранее, магнитное поле заморожено в плазму при  $T \gg \mu^{1/2}$ , а при более низких температурах его профиль определяется эффектом Нернста. При  $T = T_1$  имеется скачок индукции магнитного поля. Зная магнитную индукцию и тем самым теплопроводность плазмы  $\kappa$ , можно определить структуру волны остывания. Напомним, что (2.7) справедливо только при  $T > T_*$ . При  $T < T_*$  тепловой поток уменьшается из-за излучения, так что скорость  $V_H$  падает и, как видно из (2.4), индукция магнитного поля будет больше, чем по формулам (2.8). Однако из дальнейшего следует, что излучение начинает играть роль при  $T < T_1$ , когда плазма уже не замагничена и, следовательно, магнитное поле не влияет на структуру волны. Поэтому правильное значение  $B$  можно найти задним числом, после решения уравнения (2.3). В незамагниченной плазме (область III) это уравнение выглядит так:

$$\frac{d}{dy} \left( \mu^{-1/2} \delta_0^2 T^{3/2} \frac{dT}{dy} \right) = T^{-3/2}.$$

[здесь опущен несущественный конвективный вклад в тепловой поток и положено  $f(T) = T^{-3/2}$  для тормозного излучения]. Его решение с исчезающим при  $T \rightarrow 0$  тепловым потоком имеет вид

$$\kappa \frac{dT}{dy} = \mu^{-1/2} \delta_0^2 T^{3/2}; \quad \frac{dT}{dy} = \mu^{-1/2} \delta_0 T. \quad (2.9)$$

Так как  $q_T(T = T_1) = \left( \kappa \frac{dT}{dy} \right)_{T_1} = 5u_0$ , то для скорости расширения

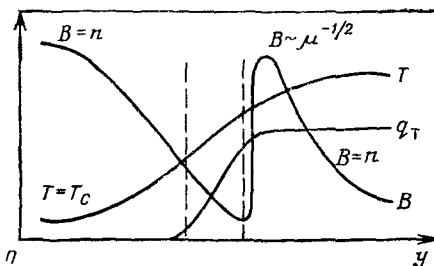


Рис 7. Структура радиационной волны охлаждения:

$T$  — температура плазмы;  $B$  — индукция магнитного поля;  $q_T$  — тепловой поток. (Пунктиром отмечена область, дающая основной вклад в потери энергии на излучение)

горячей плазмы получаем [20]:

$$u_0 = \left(\frac{15}{2}\right)^{2/5} \mu^{-1/5} \delta_0^{8/5} / 5 \gg 1. \quad (2.10)$$

Скачок индукции магнитного поля при  $T=T_1$  от  $B=2/15$  до  $B=2/15\mu^{-1/2}$  приводит к тому, что при  $T>T_1$  теплопроводность плазмы резко падает и эта область уже не вносит вклада в полное излучение. Поэтому здесь справедливы формулы (2.7) и (2.8), из которых можно найти профиль температуры в этой части переходного слоя.

Характерная ширина фронта волны остывания  $\Delta y \sim \mu^{1/4}$ . Найдем теперь магнитную индукцию при  $T<T_1$ . Из (2.9) следует, что скорость теплового сноса  $V_H = (15/2)u_0 T/T_1$  и много больше скорости течения плазмы  $u = u_0 T$ . Поэтому при  $T<T_1$  поле  $B = u_0/V_H = 2T_1/(15T)$ . Примерная структура фронта радиационной волны остывания показана на рис. 7.

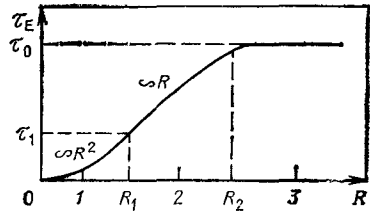
В приведенном выше анализе подразумевалось, что степень замагниченности плазмы достаточно высока, а именно:  $\delta_0 \gg \mu^{-3/4}$ . При этом  $\mu^{1/2} \gg T_1$  и термоэффекты вступают в силу в области I. Если же  $\delta_0 \ll \mu^{-3/4}$ , то профиль магнитного поля в фронте меняется. В этом случае  $B = T^{-1} \left(1 - T_1^{1/2}/T^{1/2}\right)$ , т. е. магнитное поле остается замороженным в плазму до температур  $T>T_1$ , а затем уменьшается при  $T=T_1$  до значения  $B=2/15$ . Скорость расширения горячей плазмы остается, как нетрудно видеть, прежней.

Обсудим теперь кратко эффекты, связанные с конечностью параметра  $\beta_0$ . В случае сильной замагниченности, когда  $\delta_0 \gg \mu^{-3/4}$ , они начинают проявляться при  $\beta_0 \leq \mu^{-1}$ , поэтому нужно учитывать магнитное давление и конечную проводимость плазмы. Поэтому вместо (2.1) и (2.4) получаем:

$$nT + B^2/\beta_0 = 1; \\ \frac{4\mu^{1/2}}{\beta_0 T^{3/2}} \frac{dB}{dy} + \frac{3}{2} \mu^{1/2} \alpha \frac{dT}{dy} + uB = u_0.$$

В области III при  $T<T_1$  решение остается прежним. Затем при  $T>T_1$  давление плазмы уменьшается согласно (1.28) и (1.29), а магнитная индукция возрастает до  $B = \beta_0^{1/2}$ . Начиная с температур  $T > \mu^{1/2}$ , магнитное поле становится замороженным в плазму, так что  $B = n = \beta_0^{1/2}$  в интервале  $\mu^{1/2} \ll T \ll \beta_0^{-1/2}$ . При  $T > \beta_0^{-1/2}$  давление магнитного поля уже несущественно:  $B = n = T^{-1}$ .

Рис. 8. Режимы остывания плазмы с большим  $\beta$



Если же  $\delta_0 < \mu^{-3/4}$ , то конечность  $\beta_0$  появляется, когда  $\beta_0 < \mu^{-2/5} \delta_0^{4/5}$ . В этом случае вмороженность поля в плазму сохраняется до температур  $T \geq T_1$ , поэтому  $V = n = T^{-1}$  при  $T > \beta_0^{-1/2}$  и  $V = n = \beta_0^{1/2}$  при  $T < \beta_0^{-1/2}$ . В области  $T \sim T_1$  тепловой снос магнитного поля и его диффузия приводят к быстрому уменьшению  $V$  до значения  $V = 2/15$  при  $T = T_1$ . Поскольку при  $T < T_1$  решение не меняется, во всех рассматриваемых случаях скорость расширения горячей плазмы по-прежнему определяется формулой (2.10).

Рассмотрим теперь области применимости описанных выше различных режимов остывания плазмы. Для этого удобно построить график зависимости характерного времени остывания плазменного столба  $\tau_E$  от его радиуса  $R$  (рис. 8). При малых  $R$  (теплопроводный режим) согласно (1.42)

$$\tau_E \sim R^2 / \chi_{ef} \sim R^2 e B_0 / (c T_0).$$

Такая оценка справедлива до тех пор, пока тепловой поток на стенку из-за теплопроводности плазмы больше суммарных потерь энергии на излучение. Нетрудно проверить, что при  $R \sim R_1 \sim \delta_0^{5/8} (\chi_0 \tau_0)^{1/2}$  мощность излучения из пристеночного слоя сравнивается с тепловым потоком на стенку. Поэтому при  $R > R_1$  остывание плазмы происходит в режиме радиационной волны. В этом случае

$$\tau_E \sim \frac{R}{u_0} (\tau_0 / \chi_0)^{1/2} \sim R (\tau_0 / \chi_0)^{1/2} \delta_0^{-5/8} \quad (2.11)$$

и энергетическое время жизни плазмы пропорционально лишь первой степени ее радиуса. При  $R \sim R_2 \sim \delta_0^{1/5} (\chi_0 \tau_0)^{1/2} \gg R_1$  становится существенным излучение из всего объема горячей плазмы, так что при  $R > R_2$  время остывания плазмы порядка ее радиационного времени:  $\tau_E \approx \tau_0$ .

Как уже отмечалось, для термоядерной плазмы с температурой  $T \sim 10^4$  эВ радиационное время примерно в 30 раз больше лануэновского. Поэтому вопрос о том, какому режиму остывания плазмы на рис. 8 соответствует  $\tau_E \approx \tau_L$ , зависит от параметра замагниченности ионов  $\delta_0 = (\omega_H \tau_i)_0$ . При  $R \sim R_1$   $\tau_E \sim \tau_1 \sim \tau_0 / \delta_0^{1/5}$ . Отсюда следует, что если плазма замагничена очень сильно, так что  $(\omega_H \tau_i)_0 \geq 10^6$ , имеет место режим радиационной волны, а при меньших значениях  $(\omega_H \tau_i)_0$  — режим теплопроводности. Это, конечно, очень грубые

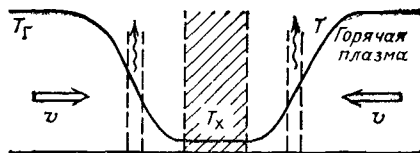
оценки, но, как показывают численные расчеты [26], в практически интересных для УТС случаях, когда  $(\omega_{H\tau})_0 \sim 10^3 - 10^4$ , потери на излучение из плазмы действительно не играют определяющей роли.

Рассмотренные аномальная теплопроводность и усиленные радиационные потери в плазме с большим  $\beta$  связаны, как нетрудно видеть, с конкретной зависимостью классических кулоновских коэффициентов переноса плазмы в магнитном поле от  $n$ ,  $T$  и  $V$ . Здесь существенно, что теплопроводность плазмы подавляется в горячей замагниченной плазме и увеличивается в холодных пристеночных областях. Из приведенных выше решений следует, что определяющей для этих эффектов является та область температур в пристеночном слое, где происходит размагничивание плазмы. В представляющих практический интерес случаях это соответствует примерно  $T \sim 10^2$  эВ. Поэтому все результаты, относящиеся к интегральным энергетическим характеристикам горячей плазмы, оказываются нечувствительными к довольно сложным процессам, происходящим в холодной пристеночной плазме с температурой в несколько электрон-вольт (это неидеальность плазмы, запирающие излучения и т. д.). Таким образом, здесь адекватно использование уравнений переноса для полностью ионизованной идеальной оптически прозрачной плазмы, в которых наличие стенки учитывается в виде простых граничных условий для параметров плазмы и магнитного поля.

Как уже отмечалось во введении, радиационная волна остывания может описывать не только потери энергии из горячей плазмы, что представляет интерес для термоядерных приложений, но и конденсация горячей плазмы на межгалактических облаках в астрофизике. Задача состоит в следующем. Пусть имеется однородная горячая плазма с объемными потерями теплоты (например, из-за тормозного излучения). Как известно [27], в такой среде возможно развитие тепловой неустойчивости, когда случайное понижение температуры плазмы в каком-то месте приводит к ускорению темпа охлаждения этого участка. В результате этого вся плазма разбивается на отдельные области с высокой температурой (и относительно низкой плотностью) и плотные холодные облака остывшей плазмы. Так как такой процесс происходит медленно в гидродинамическом масштабе времени, то давление плазмы успевает выравниваться. Поэтому быстрое остывание плазмы в переходных областях сопровождается соответствующим увеличением плотности за счет притока горячей плазмы. Другими словами, горячая плазма как бы конденсируется на холодных межгалактических облаках (рис. 9). Скорость конденсации горячей плазмы зависит как от объемной мощности излучения, так и от теплопроводности плазмы. Для плазмы без магнитного поля этот вопрос рассматривался в [28]. Так как в этом случае электронная теплопроводность плазмы  $\chi^{(e)} \propto T^{5/2}$  и сильно уменьшается в холодных областях, то основной вклад в излучение из переходного слоя вносит плазма с температурой  $T \sim T_r$  (несмотря на рост объемной мощности излучения с понижением температуры,  $Q_r \propto T^{-3/2}$  для тормозного излучения). Поэтому скорость конденсации горячей плазмы  $v_c$  не зависит от тем-



Рис. 9. Конденсация горячей замагниченной плазмы ( $T=T_r$ ) на облаке холодного газа ( $T=T_x$ ). (Пунктиром показаны области, определяющие излучение из переходного слоя)



пературы «холодного облака»  $T_x$  и по порядку равна

$$v_r \sim (\chi_r^{(e)}/\tau_r)^{1/2}, \quad (2.12)$$

где  $\chi_r^{(e)}$  и  $\tau_r$  — электронная теплопроводность и радиационное время для горячей плазмы с температурой  $T_r$ .

Как изменится этот результат, если плазма находится в относительно слабом магнитном поле, когда его давление еще мало по сравнению с тепловым ( $\beta \gg 1$ ), но плазма уже сильно замагничена, так что  $(\omega_H \tau)_{e,i} \gg 1$ ? На первый взгляд кажется, что сильное уменьшение теплопроводности плазмы (теперь  $\chi_{\perp} \sim \chi_r^{(e)} (\omega_H \tau)^{-2} (m_i/m_e)^{1/2} \ll \ll \chi_r^{(e)}$ ) соответствующим образом уменьшит и скорость конденсации

$$v_r \sim (\chi_{\perp}/\tau_r)^{1/2} \sim (\chi_r^{(e)}/\tau_r)^{1/2} (\omega_H \tau)^{-1} (m_i/m_e)^{1/4}. \quad (2.13)$$

Однако в этом случае главный вклад в потери энергии на излучение дает уже не горячая плазма с  $T \sim T_r$ , а относительно холодная область, где происходит размагничивание плазмы. Кроме того, эффект Нернста приводит к уменьшению там индукции магнитного поля (и соответственно росту теплопроводности плазмы). В результате скорость конденсации горячей плазмы оказывается намного больше, чем по оценке (2.13) (хотя она по-прежнему не зависит от температуры холодного облака  $T_x$ ). Используя формулу (2.10), выражение для  $v_r$  можно записать в таком виде:

$$v_r \sim (\chi_r^{(e)}/\tau_r)^{1/2} (\omega_{He} \tau_e)^{-2/5}. \quad (2.14)$$

Отсюда непосредственно видно, что магнитное поле, конечно, уменьшает скорость конденсации горячей плазмы [ср. с (2.12)], но гораздо слабее, чем это следует из простой оценки (2.13).

Присутствие магнитного поля качественно меняет характер решения и в следующем отношении. Излучение из горячей плазмы приводит к тому, что ее конденсация происходит на фоне общего уменьшения температуры. Поскольку в случае плазмы без магнитного поля скорость конденсации определяется излучением из горячих областей с  $T \sim T_r$ , то стационарной волны (в строгом смысле) здесь вообще не существует и формула (2.12) имеет лишь смысл качественной оценки. В плазме же с магнитным полем остывание горячей плазмы (которое происходит с характерным временем  $\tau_r$ ) представляет собой, как это видно из полученного выше решения, адiabатически медленный процесс по отношению к радиационной волне. Поэтому остывание горячей плазмы проявляется здесь лишь в том, что в выражении (2.14) для скорости конденсации величины  $\chi_r$ ,  $\tau_r$  и  $\tau_e$  медленно меняются во времени.

### 3. Потери магнитного потока при обращении поля в $\theta$ -пинче

Ускорение диффузионных процессов в плотной плазме, подобное рассмотренной в § 1 аномальной теплопроводности в плазме с большим  $\beta$ , — довольно общее явление. Оно возникает при медленных (в гидродинамическом масштабе времени) магнитотепловых процессах в плазме с  $\beta \geq 1$ , когда механическое равновесие в системе поддерживается течением плазмы. В этих условиях скорость диффузии магнитного поля и энергии характеризуется некоторыми эффективными коэффициентами переноса, которые намного больше классических.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о формировании компактного тороида в  $\theta$ -пинче. Так принято называть изображенную на рис. 10, а замкнутую плазменную конфигурацию с чисто полоидальным магнитным полем и близким к единице аспектным отношением (отношение продольного размера к поперечному). Возможность получения достаточно плотной ( $\beta \sim 1$ ) плазмы и наблюдаемое в экспериментах [29, 30] большое время жизни таких образований делает это направление одним из перспективных в работах по управляемому термоядерному синтезу. Процесс формирования компактного тороида в  $\theta$ -пинче осуществляется следующим образом [31]. Начальный магнитный поток вмораживается в плазму на первом полупериоде разряда тока (рис. 10, б). На этой фазе происходит диффузия внешнего поля в холодную начальную плазму, ее сжатие и нагрев. При этом из-за повышения проводимости

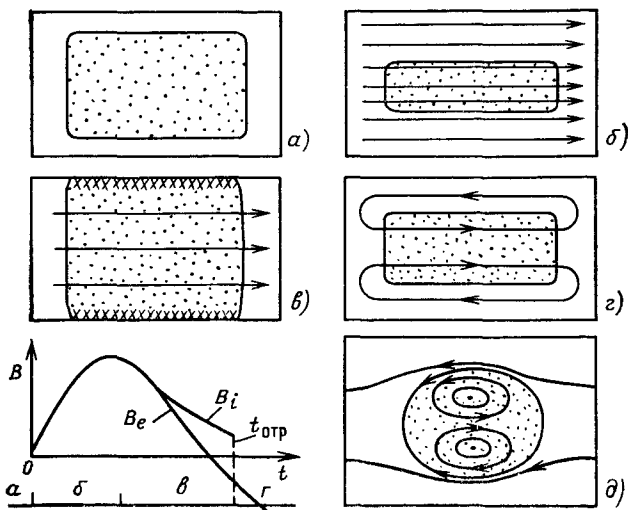


Рис. 10 Формирование компактного тороида в  $\theta$  пинче [31]:

а — начальная плазма; б — вмораживание начального потока и сжатие на первом полупериоде; в — инверсия внешнего поля и расширение плазмы к стенкам; г — отрыв плазмы от стенок и сжатие обращенным внешним полем; д — конфигурация компактного тороида

плазмы продиффундировавший в нее магнитный поток в некоторый момент «захватывается», так что дальнейшая эволюция плазменного столба протекает в условиях замороженного поля. На следующей фазе (рис. 10, в) происходит уменьшение индукции внешнего магнитного поля с последующей инверсией его направления, причем плазма, расширяясь вместе с полем, выходит к стенке камеры. Увеличение индукции внешнего магнитного поля обратного направления приводит к образованию антипараллельной магнитной структуры с оторванной от стенок камеры плазмой (фаза г на рис. 10). Компактный торонд формируется затем путем пересоединения магнитных силовых линий и продольного сжатия плазмы (рис. 10, д). Важной характеристикой этого процесса является магнитный поток первоначального направления, оставшийся в плазме к моменту отрыва ее от стенки после инверсии внешнего магнитного поля (момент  $t = t_{\text{отр}}$  на рис. 10). Он и определяет в конечном счете размеры и дальнейшее поведение компактного тора.

Метод сжатия и нагрева плазмы при обращении магнитного поля широко использовался еще в 60-е годы в экспериментах на  $\theta$ -пинчах. Происходящие при этом потери магнитного потока рассматривались в [32], где была получена оценка для максимального поля, захваченного в плазме после инверсии. При быстром обращении внешнего магнитного поля плазма вместе с замороженным в нее магнитным потоком расширяется к стенкам камеры с альфвеновской скоростью. Поэтому скорость уменьшения магнитного потока в плазме

$$d\Phi/dt = -2\pi RBV_A = -2\pi RB^2/\sqrt{4\pi nm_i}.$$

Если инверсия поля происходит за время  $\tau$ , то изменение магнитного потока

$$\Delta\Phi \approx \tau d\Phi/dt = -2\pi RB^2\tau/\sqrt{4\pi nm_i}.$$

Отсюда следует, что относительные потери захваченного плазмой магнитного потока невелики, если  $\Delta\Phi < \Phi \approx \pi R^2 B$ , т. е.

$$B < B_{GN} \approx R \sqrt{4\pi nm_i} / (2\tau). \quad (3.1)$$

Такая оценка относится, как уже отмечалось, к случаю быстрого обращения поля, когда время инверсии  $\tau$  меньше альфвеновского времени  $R/V_A$ . В современных же экспериментах по формированию компактных торондов в  $\theta$ -пинче обращение поля происходит квазистатически:  $\tau \gg R/V_A$  и потери магнитного потока определяются диффузией поля из-за конечной проводимости плазмы. Однако наблюдаемые экспериментально [33, 34] быстрые потери захваченной плазмой обратного магнитного потока нельзя объяснить классической кулоновской проводимостью плазмы. Поэтому в этих работах был сделан вывод об аномальном сопротивлении плазмы вследствие развития микронеустойчивостей в токовом слое. На самом же деле, как было показано в [31, 35], причиной усиления потерь магнитного потока является движение плазмы и образова-

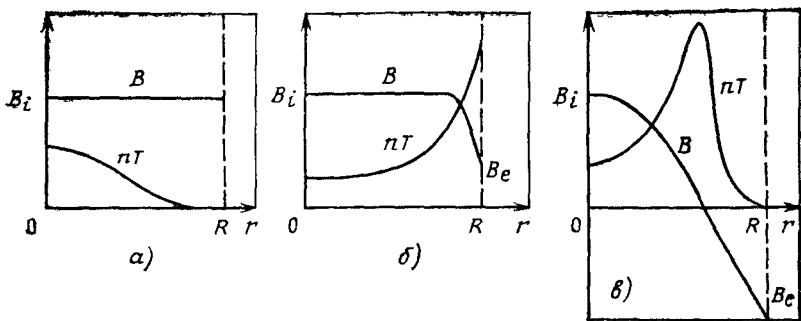


Рис. 11. Распределения давления плазмы и индукции магнитного поля, соответствующие различным фазам образования антипараллельной магнитной структуры:

**а** — вмораживание начального потока и сжатие на первом полупериоде; **б** — инверсия внешнего поля и расширение плазмы к стенкам, **в** — отрыв плазмы от стенок и сжатие обращенным внешним полем

ние вблизи стенок тонкого слоя плазмы с  $\beta \sim 1$ . При этом диффузию магнитного поля удобно характеризовать некоторым эффективным коэффициентом магнитной вязкости  $D_{ef}$ , который намного превышает свое классическое значение  $D_{cl} = c^2 / (4\pi\sigma)$  [35].

Потери захваченного плазмой магнитного потока (рис. 11) происходят на стадии **Б**, когда индукция внешнего магнитного поля  $B_e$  меньше ее значения в плазме  $B_i$ . Так как характерное время изменения индукции внешнего магнитного поля в интересующем теперь нас случае больше альфвеновского времени, то эволюция системы происходит при однородном полном давлении:

$$\frac{\partial}{\partial r} [nT + B^2/(8\pi)] \approx 0.$$

Поэтому у стенки образуется пристеночный слой плазмы с давлением  $nT \sim B_i^2 / (8\pi)$  и большой плотностью  $n \gg n_0$ , где  $n_0$  — плотность однородной плазмы в центре. Такое увеличение плотности возникает за счет расширения плазмы от центра к стенкам. Но так как в основном объеме плазмы магнитное поле заморожено в нее, то течение плазмы приводит к конвективному выносу магнитного поля к стенкам, что и является причиной возрастания потерь магнитного потока.

Толщина пристеночного слоя с высокой плотностью плазмы мала по сравнению с радиусом системы, так что задачу можно рассматривать как плоскую. Пусть стенка — плоскость  $x=0$ , плазма находится в области  $x>0$ , а магнитное поле направлено вдоль оси  $z$ . Тогда условие равновесия плазмы и уравнения переноса можно записать в следующем виде:

$$nT + B^2/(8\pi) = B_i^2/(8\pi); \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nv) = 0; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{c}{e} \beta_{\wedge} \frac{\partial T}{\partial x} - vB \right); \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} nT + B^2/(8\pi) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \kappa_{\perp} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{cT}{4\pi e} \beta_{\wedge} \frac{\partial B}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{5}{2} nTv + \frac{B}{4\pi} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{c}{e} \beta_{\wedge} \frac{\partial T}{\partial x} - vB \right) \right\}. \quad (3.5) \end{aligned}$$

В уравнении (3.2) предполагается, что в основном объеме плазмы ее давление много меньше давления магнитного поля ( $\beta \ll 1$ ), а в энергетическом балансе плазмы (3.5) последнее слагаемое в правой части учитывает пойнтинговский вклад в поток энергии. На стенке (при  $x=0$ ) заданы индукция внешнего магнитного поля  $B_e$ , температура плазмы  $T(0)=0$  и ее скорость  $v(0)=0$ . Для оценки эффективного коэффициента диффузии магнитного поля  $D_{ei}$  будем считать  $B_e$  постоянным и равным по порядку индукции магнитного поля в однородной плазме  $B_i$ . Здесь можно также не учитывать изменение во времени  $B_i$  и  $n_0$ , что эквивалентно приближению неограниченной вдоль оси  $x$  плазмы, когда  $B(+\infty)=B_i$ , а  $n(+\infty)=n_0$ . В реальной задаче с плазмой конечного радиуса это соответствует той стадии процесса, когда относительные потери магнитного потока еще невелики. В такой постановке эта задача имеет автомодельное решение. Введем безразмерные величины, определяемые таким образом:  $h=B/B_i$ ;  $\rho=n/n_0$ ,  $\theta=T/T_0$ , где  $T_0=B_i^2/(8\pi n_0)$ . В автомодельном решении  $h(x, t)=h(\xi)$ ;  $\rho(x, t)=\rho(\xi)$ ;  $\theta(x, t)=\theta(\xi)$ ;  $v(x, t)=-(D_0/t)^{1/2}u(\xi)$ , где  $\xi=x/(D_0t)^{1/2}$ , а  $D_0=c^2/(4\pi\sigma(T_0))$  — магнитная вязкость плазмы с температурой  $T_0$ . Уравнения (3.2) — (3.5) переписываются теперь так:

$$\rho\theta + h^2 = 1; \quad (3.6)$$

$$-\frac{\xi}{2} \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (\rho u); \quad (3.7)$$

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dh}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( \theta^{-3/2} \frac{dh}{d\xi} + \alpha \frac{d\theta}{d\xi} + uh \right); \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\xi}{2} \frac{d(\rho\theta)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left\{ \kappa \frac{d\theta}{d\xi} + \alpha\theta \frac{dh}{d\xi} + \right. \\ \left. + \frac{5}{2} \rho\theta u + h \left( \theta^{-3/2} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \alpha \frac{d\theta}{d\xi} + uh \right) \right\}, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где безразмерный коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и термоэлектрический коэффициент  $\alpha$  по-разному зависят от параметров плазмы и магнитного поля в области замагниченной и немагнитной

плазмы:

$$\kappa = \left. \begin{cases} \mu^{-1/2} \rho^2 / (h^2 \theta^{1/2}); & h \theta^{3/2} / \rho > \mu^{-1/2} \delta_0^{-1} & \text{(I);} \\ \delta_0 \rho \theta / h; & \delta_0^{-1} < h \theta^{3/2} / \rho < \mu^{-1/2} \delta_0^{-1} & \text{(II);} \\ \delta_0^2 \theta^{5/2}; & h \theta^{5/2} / \rho < \delta_0^{-1} & \text{(III);} \end{cases} \right\} \quad (3.10)$$

$$\alpha = \left. \begin{cases} \rho / (h \theta^{3/2}), & \text{(I, II).} \\ \delta_0^2 h \theta^{3/2} / \rho, & \text{(III).} \end{cases} \right\}$$

Здесь  $\delta_0 \equiv (\omega_{He} \tau_e) (n_0, T_0, B_i) \gg 1$ ;  $\mu \equiv m_e / m_i \ll 1$ .

Возрастание потерь магнитного потока выражается в том, что скорость натекания однородной плазмы  $u(+\infty) = u_0 \gg 1$ . При этом можно пренебречь левыми частями уравнений (3.8) и (3.9), так как

$$\int_0^\infty \frac{\xi}{2} \frac{dh}{d\xi} d\xi \ll u_0, \quad \int_0^\infty \frac{\xi}{2} \frac{d(\rho\theta)}{d\xi} d\xi \ll u_0,$$

и считать постоянным поток магнитного поля и поток энергии:

$$q_h = \theta^{-3/2} \frac{dh}{d\xi} + \alpha \frac{d\theta}{d\xi} + u h = u_0; \quad (3.11)$$

$$q_w = \kappa \frac{d\theta}{d\xi} + \alpha \theta \frac{dh}{d\xi} + \frac{5}{2} \rho \theta u + h u_0 = u_0. \quad (3.12)$$

Из условий (3.11) и (3.12) и уравнения (3.6) можно найти профили температуры плазмы, ее плотности и индукции магнитного поля в пристеночном слое, куда  $u_0$  входит как неизвестный пока параметр. Для определения  $u_0$  нужно воспользоваться уравнением непрерывности (3.7), из которого после интегрирования следует, что

$$u_0 = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \xi \frac{d\rho}{d\xi} d\xi \quad (3.13)$$

(это означает, что натекающая с бесконечности со скоростью  $u_0$  плазма накапливается в пристеночном слое).

Рассмотрим сначала уравнения (3.11) и (3.12) в незамагниченной плазме у стенки (область III). Так как внешнее магнитное поле  $h_e < 1$ , то у стенки давление плазмы  $\rho\theta \sim 1$ . При этом основной вклад в потоки энергии и магнитного поля вносят теплопроводность и магнитная диффузия:

$$\kappa \frac{d\theta}{d\xi} = \delta_0^2 \theta^{5/2} \frac{d\theta}{d\xi} \sim u_0; \quad \theta^{-3/2} \frac{dh}{d\xi} \sim u_0. \quad (3.14)$$

Отсюда следует, что  $\xi \sim \delta_0^2 u_0^{-1} \theta^{7/2}$ , а  $dh \sim \delta_0^2 \theta^4 d\theta$ . Это решение справедливо при  $\theta \leq \theta_1 \sim \delta^{-2/5}$ , где происходит замагничивание электронов, а индукция магнитного поля возрастает на  $\Delta h \sim 1$ . При  $\theta > \theta_1$

происходит переход в область II, где электроны уже замагничены ( $\omega_{He}\tau_e > 1$ ), а ионы еще нет ( $\omega_{H}\tau_i < 1$ ). Тогда уравнения (3.11) и (3.12) можно записать, используя (3.6) и (3.10), в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \kappa \frac{d\theta}{d\xi} &= \delta_0 \frac{\rho\theta}{h} \frac{d\theta}{d\xi} \sim u_0(1-h) \sim u_0\rho\theta, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d\theta}{d\xi} \approx u_0\delta_0^{-1}; \\ \theta^{-1/2} \frac{dh}{d\xi} &= -\frac{1}{h\theta^{1/2}} \frac{d(\rho\theta)}{d\xi} \sim -\theta^{-1/2} \frac{d(\rho\theta)}{d\xi} \sim u_0. \end{aligned} \right\} (3.15)$$

Поэтому в области II при изменении температуры  $\Delta\theta \sim \theta_1$  давление плазмы падает от значения  $\rho\theta \sim 1$  до  $\rho\theta \sim \mu^{1/2}$  (здесь происходит переход от плазмы с  $\beta \sim 1$  к плазме с  $\beta \ll 1$ ).

В замагниченной плазме (область I) из (3.11) и (3.12) следует, что давление ее быстро уменьшается при почти постоянной температуре  $\theta \sim \theta_1$ :  $-d \ln(\rho\theta)/d \ln \theta \sim \mu^{-1/2} \gg 1$ . Так происходит до тех пор, пока плотность плазмы  $\rho \gg 1$ . При  $\rho \sim 1$  температура достигает своего максимума  $\theta_{\max} \sim \theta_1$ , а затем уменьшается при удалении от стенки по закону  $\theta \sim \mu^{-1} u_0^{-2} \xi^{-2}$  (здесь  $\rho = h = 1$ ). Качественный характер полученного решения показан на рис. 12.

Теперь, зная структуру пристеночного слоя, можно вернуться к уравнению (3.13) для определения  $u_0$ . Нетрудно убедиться, что основной вклад в этот интеграл дает та область пристеночного слоя, где параметр замагниченности электронов  $\omega_{He}\tau_e \sim 1$  и  $\rho\theta \sim 1$ :

$$\int_0^{\infty} \xi \frac{d\rho}{d\xi} d\xi \sim \rho_{1\xi 1} \sim \theta_1^{-1} \delta_0^2 u_0^{-1} \theta_1^{1/2} \sim \delta_0 u_0^{-1}.$$

Поэтому для величины  $u_0$  оказывается справедливой такая оценка:  $u_0 \sim \delta^{1/2} \gg 1$ . Это означает, что вынос магнитного потока из плазмы происходит с эффективным коэффициентом магнитной диффузии

$$D_{ef} \sim u_0^2 D_0 \sim (\omega_{He}\tau_e)_0 c^2 / (4\pi\sigma_0) \sim cB_i / (4\pi n_0 e). \quad (3.16)$$

Интересно отметить, что  $D_{ef}$  вообще не зависит от частоты столкновений в плазме. Поэтому такая оценка верна не только для плазмы с парными кулоновскими электрон-ионными столкновениями, но и в случае аномального сопротивления плазмы (слабая зависимость скорости потерь магнитного потока от частоты рассеяния электронов подтверждается и результатами проведенных в [36] численных расчетов). Здесь можно провести аналогию с ударными

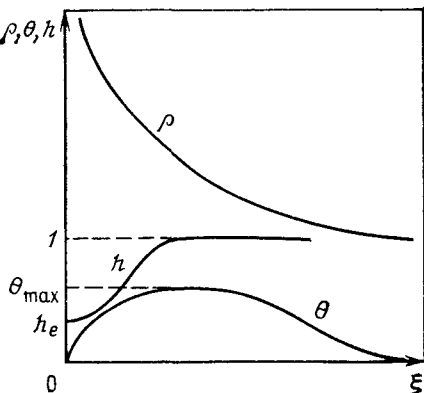


Рис. 12. Структура пристеночного слоя при обращении внешнего магнитного поля

волнами в газодинамике [18], где толщина ударной волны устанавливается такой, чтобы обеспечить нужную диссипацию. В нашем же случае проводимость и теплопроводность плазмы регулируют ширину токового слоя так, чтобы приносимый течением плазмы магнитный поток мог продиффундировать на стенку.

Очевидно, что при формировании конфигурации с обращенным магнитным полем потери начального магнитного потока будут невелики, если характерное время  $\tau$  изменения внешнего поля удовлетворяет такому условию:

$$\tau < \tau_h \sim R^2/D_{ef} \sim 4\pi n_0 e R^2 / (c B_i) \sim \frac{R}{V_A} \left( \frac{R \omega_{pi}}{c} \right). \quad (3.17)$$

Отсюда следует, что при заданных  $R$  и  $\tau$  относительные потери магнитного потока возрастают при увеличении индукции магнитного поля и уменьшении плотности плазмы (такой же вывод был сделан в [31] на основе численных расчетов изменения магнитного поля в плазме). Представляет интерес и другая постановка вопроса, когда оценивается максимальная индукция магнитного поля, захваченного в плазме после инверсии [32]. Тогда из (3.17) следует, что

$$B < B_{\max} \approx 4\pi n e R^2 / (c \tau) \approx B_{G.N} (2R \omega_{pi} / c). \quad (3.18)$$

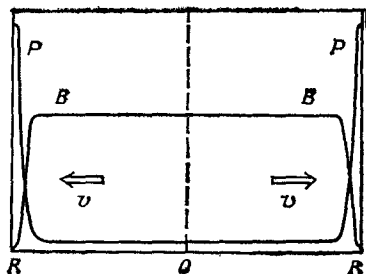
Сравнивая этот результат с формулой (3.1), можно увидеть, что при квазистатическом обращении максимальная индукция магнитного поля в плазме увеличивается в  $2R \omega_{pi} / c$  раз (в условиях экспериментов [29, 30] это примерно на порядок).

#### **4. Генерация сверхсильных магнитных полей при сжатии плазмы лайнером**

Задача, во многом аналогичная рассмотренной выше, возникает при исследовании возможности получения сверхсильных магнитных полей при сжатии плазмы с магнитным полем лайнером. Хорошо известно, что один из наиболее распространенных способов генерации импульсных магнитных полей мегагауссного диапазона — сжатие магнитного потока хорошо проводящей цилиндрической оболочкой (лайнером) [37]. Максимальные магнитные поля, полученные таким методом, лежат в пределах  $10^3$  Тл, причем одним из основных лимитирующих факторов здесь является разрушение токового скин-слоя. Дело в том, что в металлических проводниках коэффициент температуропроводности много меньше магнитной вязкости (примерно на два порядка). Поэтому выделяющаяся в единице объема скин-слоя из-за джоулевых потерь энергия  $B^2 / (8\pi)$  не успевает выноситься из скин-слоя, и при  $B \sim 10^3$  Тл происходит тепловой взрыв проводника. Недавно [38] был предложен несколько иной способ достижения сверхсильных полей, позволяющий, по мнению авторов, обойти эту трудность и продвинуться в область магнитного поля порядка  $10^4$  Тл. Суть его состоит в быстром сжатии лайнером плазмы с замороженным начальным



Рис. 13. Профили давления и индукции магнитного поля при сжатии плазмы лайнером



магнитным полем. При этом усиление магнитного поля происходит за счет токов, индуцируемых в плазме (так что лайнер может быть вообще непроводящим). Предполагается, что магнитное поле будет сжиматься вместе с плазмой, если выполнено условие:

$$Re_m = R(t)u(t)/D_m(t) \gg 1, \quad (4.1)$$

где  $Re_m$  — магнитное число Рейнольдса;  $R$  — радиус лайнера;  $u$  — радиальная скорость сжатия;  $D_m$  — магнитная вязкость плазмы, равная  $c^2/(4\pi\sigma(t))$ ;  $\sigma$  — проводимость плазмы. Если в начальный момент времени (до сжатия) тепловая энергия плазмы меньше энергии магнитного поля ( $\beta_0 = 8\pi n_0 T_0 / B_0^2 \ll 1$ ;  $n_0$ ,  $T_0$  — начальные плотность и температура плазмы, а  $B_0$  — начальное магнитное поле), то при условии (4.1) кинетическая энергия лайнера переходит в энергию магнитного поля.

Для достижения сверхсильных магнитных полей в такой схеме важно обеспечить выполнение неравенства (4.1) в момент наибольшего сжатия, когда скорость потерь магнитного потока максимальна. В своем предложении авторы работ [38] существенно используют здесь то обстоятельство, что при сжатии плазмы происходит ее адиабатический нагрев, приводящий к быстрому увеличению проводимости плазмы ( $\sigma \propto T^{3/2} \propto R^{-2}$ ). Это и позволило, согласно проведенным в [38] оценкам, обеспечить сохранение магнитного потока в плазме (и тем самым получить сверхсильное магнитное поле) при вполне достижимых скоростях лайнера ( $u \sim 10^6$  см/с).

Однако, как отмечено в [39], при сжатии плазмы низкого давления ( $\beta \ll 1$ ) потери магнитного потока происходят гораздо быстрее, чем по простым оценкам, основанным на обычной кулоновской проводимости плазмы. Дело в том, что представляющие практический интерес скорости сжатия плазмы много меньше алфвеновской скорости, поэтому процесс является адиабатическим и полное давление в системе успевает выравняться:

$$(\partial/\partial r)(nT + B^2/(8\pi)) \approx 0.$$

При сжатии индукция магнитного поля в центре становится больше, чем у стенки лайнера (для непроводящего лайнера магнитное поле на нем вообще не меняется и остается равным своему началь-

ному значению). Это приводит к выталкиванию плазмы к стенкам лайнера и образованию там пристеночного слоя плазмы с давлением  $nT \sim B_i^2 / (8\pi)$  и большой плотностью  $n \gg n_i$  ( $B_i$  и  $n_i$  — индукция магнитного поля и плотность однородной плазмы в центре). Качественный вид профилей магнитного поля и давления плазмы при этом показан на рис. 13. Такое перераспределение плотности поддерживается течением плазмы от центра к стенкам. Так как в основном объеме плазмы магнитное поле заморожено в нее, то течение приводит к конвективному выносу магнитного поля к стенке. В то же время поток плазмы сжимает токовый слой у стенки настолько, что приносимый конвекцией магнитный поток уходит на стенку за счет конечной проводимости плазмы. В результате для обеспечения эффективного сжатия магнитного поля нужно выполнение условия, значительно более жесткого, чем (4.1):

$$\text{Re}_{\text{ef}} \equiv R(t)u(t)/D_{\text{ef}} \gg 1,$$

где  $D_{\text{ef}}$  — эффективный коэффициент магнитной вязкости, который много больше своего классического значения  $D_{\text{cl}} = c^2 / (4\pi\sigma)$ .

Для грубой оценки темпа потерь магнитного потока из плазмы можно воспользоваться результатами, полученными в предыдущем разделе. Тогда согласно (3.16),  $D_{\text{ef}} \approx cB_i / (4\pi n_i e)$ . Зная скорость магнитной диффузии, рассмотрим теперь возможность получения сверхсильных магнитных полей таким способом. При этом будем ориентироваться примерно на те же параметры системы, что и в [38]. Так как при сжатии в области вне пристеночного слоя магнитное поле заморожено в плазму ( $B_i/n_i = \text{const} = B_0/n_0$ ), то  $D_{\text{ef}} \sim cB_0 / (4\pi n_0 e)$ . Поэтому выгодно повышать плотность плазмы  $n_0$ . В то же время значение  $n_0$  ограничено сверху условием малости давления плазмы по сравнению с давлением магнитного поля. Так, при  $B_0 \approx 50$  Тл и  $T_0 \approx 30$  эВ значению  $\beta_0 = 16\pi n_0 T_0 / B_0^2 \approx 0,3$  соответствует  $n_0 = 3 \cdot 10^{19}$  см<sup>-3</sup>. При этом  $D_{\text{ef}} \approx 10^5$  см<sup>2</sup>/с. При сжатии плазмы от  $R_0 \approx 10^{-1}$  см до  $R_k \approx 10^{-2}$  см (чему соответствует  $B_{\text{max}} \approx 5 \cdot 10^3$  Тл) эффективное магнитное число Рейнольдса в момент наибольшего сжатия  $\text{Re}_{\text{ef}} = R_k u / D_{\text{ef}} \approx 10^{-7}$  и см/с. Таким образом, для обеспечения  $\text{Re}_{\text{ef}} \approx 3$  требуются скорости сжатия на уровне  $u \approx 3 \cdot 10^7$  см/с, что примерно на порядок больше значений, на которые ориентировались в работе [38].

Задача об эволюции магнитного поля в плазме, адиабатически сжимаемой лайнером, допускает и более детальное аналитическое решение. Основано оно на том, что толщина пристеночного слоя, где существенна неоднородность плазмы, мала по сравнению с ее радиусом. Поэтому изменение во времени параметров занимающей основную часть объема однородной плазмы можно находить из простых уравнений баланса частиц и магнитного потока. Для получения этих соотношений нужно знать структуру пристеночного слоя, которая описывается уравнениями (3.2) — (3.5). Отмеченное выше сильное сжатие пристеночного слоя приводит к тому, что в уравнениях (3.4) и (3.5) можно пренебречь левыми частями, т. е.

считать постоянными полные потоки магнитного поля и энергии:

$$q_H = -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{c}{e} \beta_\Lambda \frac{\partial T}{\partial x} + vB = v_i B_i; \quad (4.2)$$

$$q_W = -\kappa_\perp \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{cT}{4\pi e} \beta_\Lambda \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{5}{2} nTv + \frac{B}{4\pi} v_i B_i = \frac{B_i^2}{4\pi} v_i, \quad (4.3)$$

где  $v_i$  — скорость втекания однородной плазмы в пристеночный слой. Вместе с условием (3.2) уравнения (4.2) и (4.3) определяют структуру пристеночного слоя. Нетрудно видеть, что они совершенно аналогичны соотношениям (3.11) и (3.12). Отличие состоит в том, что полученное выше автомодельное решение соответствует случаю  $B_i = \text{const}$ , когда все пространственные масштабы растут пропорционально  $t^{1/2}$ , а скорость соответственно уменьшается как  $t^{-1/2}$ . Теперь же из-за сжатия плазмы и изменения индукции магнитного поля в ней временная зависимость масштабов длины и скорости становится более сложной, но автомодельный характер решения сохраняется. В частности, профили плотности плазмы, ее температуры и индукции магнитного поля в пристеночном слое остаются такими же, как показано на рис. 12.

Для дальнейшего удобно записать магнитный поток (4.2) в таком виде:

$$q_H = \alpha D_m B/R, \quad (4.4)$$

где  $\alpha$  — некоторый численный коэффициент, причем  $\alpha \gg 1$ . Это соответствует толщине пристеночного слоя  $\Delta \sim R/\alpha$ . Тогда для магнитного потока в плазме  $\Phi = \pi R^2 B$  можно записать такое уравнение

$$d\Phi/dt = -2\pi R q_H = -2\pi\alpha D_m B. \quad (4.5)$$

Еще одно условие следует из баланса числа частиц между однородной плазмой и пристеночным слоем. Представление  $q_H$  в виде (4.4) означает, что скорость расширения плазмы  $v = q_H/B = \alpha D_m/R$ . Поэтому число частиц в пристеночном слое  $N_\Delta$  изменяется по закону

$$dN_\Delta/dt = 2\pi R v n = 2\pi\alpha n D_m. \quad (4.6)$$

Так как решение остается автомодельным, то для нахождения связи величины  $N_\Delta$  с параметрами однородной плазмы можно воспользоваться уже описанным выше решением уравнений (3.11) и (3.12). Отсюда следует, что

$$N_\Delta \approx \pi R^2 n (\omega_{He} \tau_e) / \alpha. \quad (4.7)$$

Теперь, зная закон сжатия плазмы  $R(t)$  и учитывая в замороженности магнитного поля в однородную плазму:  $B/n = \text{const}$ , из уравнений (4.5) — (4.7) можно найти временную зависимость индукции магнитного поля в плазме  $B(t)$ . Пусть в начальный момент времени имеется однородная плазма с плотностью  $n_0$ , магнитной индукцией  $B_0$  и радиусом  $R_0$ . Введем безразмерные величины  $\tau = tu/R_0$ ;  $r(\tau) = R/R_0$ ;  $x(\tau) = \Phi/(\pi R_0^2 B_0)$ ;  $y(\tau) = N_\Delta/(\pi R_0^2 n_0)$ , где  $u$  — харак-

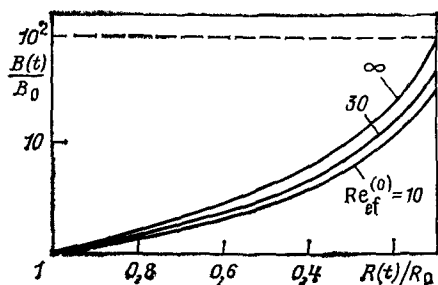


Рис. 14. Изменение индукции магнитного поля в плазме при ее сжатии лайнером, движущимся с постоянной скоростью, для различных значений эффективного магнитного числа Рейнольдса  $Re_{ef}^{(0)}$

терная скорость лайнера. В этих переменных уравнения (4.5) — (4.7) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} dx/d\tau &= - \left(1/Re_{ef}^{(0)}\right) x^2/(r^2 y); \\ dy/d\tau &= \left(1/Re_{ef}^{(0)}\right) x^2/(r^2 y), \end{aligned} \quad (4.8)$$

причем  $Re_{ef}^{(0)}$  — начальное эффективное магнитное поле Рейнольдса, равное

$$Re_{ef}^{(0)} = \frac{R_0 \mu}{2D_{m0} (\omega_{ne} \tau_e)_0} = 2\pi n_0 e R_0 \mu / (c B_0). \quad (4.9)$$

Как видно из (4.8), сумма  $x + y = \text{const}$ , а так как в начальный момент времени  $x = 1$ , а  $y = 0$ , то  $y = 1 - x$ . С учетом этого первое из уравнений (4.8) легко интегрируется:

$$\frac{1}{x} - 1 + \ln x = \frac{1}{Re_{ef}^{(0)}} \int_0^\tau \frac{d\tau}{r^2(\tau)}.$$

На рис. 14 показано изменение магнитного поля в плазме при ее десятикратном сжатии по радиусу в случае лайнера, движущегося с постоянной скоростью, т. е. для  $r(\tau) = 1 - \tau$ . Как видно, для эффективного сжатия магнитного потока и усиления индукции начального поля на два порядка требуется, чтобы  $Re_{ef}^{(0)}$  было примерно 30. Это означает, что при  $R_0 \approx 10^{-1}$  см,  $B_0 \approx 50$  Тл и при  $n_0 \approx 3 \cdot 10^{19}$  см $^{-3}$  необходима скорость сжатия  $u \approx 5 \cdot 10^7$  см/с. Следует здесь отметить, что при учете замедления лайнера на конечной стадии сжатия требования к его начальной скорости могут быть еще более жесткими.

## 5. Быстрая диссипация энергии магнитного поля в нейтральном слое

Еще одной иллюстрацией взаимного влияния теплопроводности и диффузии магнитного поля в плотной плазме является задача о быстрой диссипации энергии магнитного поля в нейтральном слое. Токовые слои в области нулевого магнитного поля в плазме

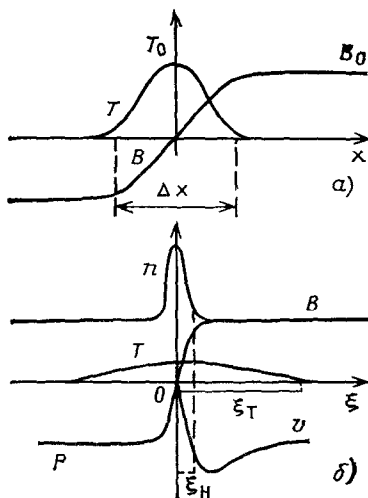
Рис. 15. Структура нейтрального слоя в плазме без учета тепловых процессов (а) и с учетом теплопроводности плазмы (б)

играют важную роль в астрофизике и физике лабораторной плазмы. В них может происходить мощное выделение запасенной в магнитном поле энергии, проявляющееся, например, в солнечных вспышках [40]. Диффузия магнитного поля через нейтральный слой может определять время существования плазменных конфигураций с обращенным магнитным полем, представляющих интерес для термоядерных исследований [41]. Основной проблемой, возникающей при попытках объяснить возникновение вспышек на Солнце, является скорость энерговыделения.

Дело в том, что из-за высокой проводимости горячей плазмы время, необходимое для выделения типичной для вспышек энергии за счет обычной джоулевой диссипации энергии магнитного поля, на много порядков больше наблюдаемого. Поэтому для объяснения механизма солнечных вспышек привлекается явление пересоединения магнитных силовых линий вследствие развития в плазме нейтрального слоя разрывной (tearing) неустойчивости [42]. Однако, как отмечено в [43], скорость диссипации энергии магнитного поля может существенно возрасти даже в рамках простейшей одномерной модели, если наряду с омической диссипацией учесть вынос энергии из нейтрального слоя за счет теплопроводности плазмы и ее излучения.

Обычная оценка скорости диффузии магнитного поля в нейтральном слое, проведенная без учета тепловых процессов, выглядит так. Пусть в плазме с плотностью  $n_0$  имеется магнитное поле  $B_z$ , равное  $B_0$  при  $x > 0$  и  $-B_0$  при  $x < 0$ . Вне токового слоя давление плазмы предполагается пренебрежимо малым по сравнению с давлением магнитного поля. В самом нейтральном слое энергия магнитного поля идет на джоулев нагрев электронов, температура которых становится равной  $T_0 \sim B_0^2 / (8\pi n_0)$ . При этом толщина токового слоя  $\Delta x$  увеличивается по закону  $\Delta x \sim (D_0 t)^{1/2}$ , где  $D_0 = c^2 / (4\pi \sigma_0)$  — коэффициент магнитной вязкости, определяемый проводимостью плазмы  $\sigma_0 = \sigma(T_0)$  (рис. 15, а). Как уже отмечалось, из-за высокой проводимости горячей плазмы вычисленная таким образом скорость диссипации энергии магнитного поля гораздо меньше наблюдаемой.

Рассмотрим теперь влияние выноса теплоты из нейтрального слоя на мощность джоулевого нагрева плазмы. Такой вынос может быть связан, в частности, с теплопроводностью, так как в изотермической ( $T_i \approx T_e = T$ ) замагниченной плазме коэффициент попереч-



ной температуропроводности  $\chi_{\perp} \sim r^2 H \nu_i$ ; [17] при  $nT \sim B^2/(8\pi)$  в  $(m_i/m_e)^{1/2}$  раз больше магнитной вязкости.

Запишем уравнения переноса плазмы, опустив все несущественные для этой задачи слагаемые:

$$\begin{aligned} nT + B^2/(8\pi) &= B_0^2/(8\pi); \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} - vB \right); \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{3}{2} nT + B^2/(8\pi) \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \chi_{\perp} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{vB}{4\pi} \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} - vB \right) \right\}; \\ \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (nv) &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения имеют автомодельное решение, так что все величины зависят только от переменной  $\xi = x/(D_0 t)^{1/2}$ . После введения безразмерных величин  $B(x, t) = B_0 B(\xi)$ ;  $n(x, t) = n_0 n(\xi)$ ;  $T(x, t) = T_0 T(\xi)$ ;  $v(x, t) = (D_0/t)^{1/2} v(\xi)$  основные уравнения можно переписать в таком виде:

$$nT + B^2 = 1; \quad (5.1)$$

$$-\frac{\xi}{2} \frac{dB}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left( T^{-3/2} \frac{dB}{d\xi} - vB \right); \quad (5.2)$$

$$-\frac{\xi}{2} \frac{d(nT)}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} \left\{ \mu^{-1/2} \frac{n^2}{B^2 T^{1/2}} \frac{dT}{d\xi} + \frac{B}{4} \left( T^{-3/2} \frac{dB}{d\xi} - vB \right) \right\}; \quad (5.3)$$

$$\frac{\xi}{2} \frac{dn}{d\xi} = \frac{d}{d\xi} (nv), \quad (5.4)$$

где  $\mu \equiv m_e/m_i \ll 1$ .

Большая теплопроводность плазмы качественно меняет характер решения (рис. 15, б). Оно становится двухмасштабным: характерный масштаб изменения магнитного поля  $\xi_H$  много меньше температурного масштаба  $\xi_T$ . При этом температура плазмы в нейтральном слое значительно уменьшается:  $T_* \ll 1$ . Тогда из условия баланса давлений (5.1) сразу следует, что в нейтральном слое происходит сильное сжатие плазмы до плотности  $n_* \sim T_*^{-1} \gg 1$ . Это сжатие обеспечивается натеканием плазмы с периферии к нейтральному слою со скоростью  $v_0$ . Порядок параметров  $T_*$ ,  $\xi_T$ ,  $\xi_H$  и  $v_0$  можно определить из следующих соображений. Приносимая в нейтральный слой течением плазмы магнитная энергия переходит там в тепло и выносится из нейтрального слоя за счет теплопроводности плазмы. Поэтому температура плазмы  $T_*$  и масштаб ее изменения  $\xi_T$  устанавливаются такими, чтобы теплопроводностный поток теплоты был одного порядка с пойнтинговским потоком энергии:

$$\mu^{-1/2} T_*^{-1/2} \frac{dT}{d\xi} \sim \mu^{-1/2} T_*^{1/2} \xi_T^{-1} \sim v_0 B^2 \sim v_0. \quad (5.5)$$

Еще одно соотношение следует из закона сохранения энергии. Так,

интегрируя по  $\xi$  уравнение (5.3), получаем, что

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \xi \frac{d(nT)}{d\xi} d\xi = v_0/4 \quad \text{или} \quad T_* \xi_T \sim v_0 \quad (5.6)$$

(здесь учтено, что тепловая энергия плазмы сосредоточена на масштабе  $\xi_T$ , где плотность плазмы  $n \approx 1$ ).

Так как вне нейтрального слоя с толщиной  $\xi_H$  магнитное поле заморожено в плазму, то вместе с потоком плазмы к нейтральному слою приносится магнитный поток, равный  $v_0$ . В самом нейтральном слое, где скорость плазмы падает, аннигиляция встречных магнитных потоков происходит в результате магнитной диффузии, поэтому

$$T_*^{-3/2} \frac{dB}{d\xi} \sim T_*^{-3/2} \xi_H^{-1} \sim v_0. \quad (5.7)$$

Последнее условие следует из уравнения непрерывности (5.4) и означает, что натекающий поток плазмы накапливается в нейтральном слое:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \xi \frac{dn}{d\xi} d\xi \sim n_* \xi_H \sim T_*^{-1} \xi_H \sim v_0. \quad (5.8)$$

Таким образом, из (5.6)—(5.8) получаем:

$$T_* \sim \mu^{1/3}; \quad \xi_H \sim \mu^{-1/32}; \quad \xi_T \sim \mu^{-9/32}, \quad v_0 \sim \mu^{-5/32}. \quad (5.9)$$

Отсюда следует, что аннигиляция магнитных потоков происходит с эффективным коэффициентом магнитной диффузии

$$D_{\text{ef}} \sim v_0^2 D_0 \sim \mu^{-5/16} D_0 \gg D_0. \quad (5.10)$$

Отметим, что усиление диссипации энергии магнитного поля связано не только с падением температуры плазмы (и соответствующим уменьшением проводимости) в нейтральном слое (это видно хотя бы из того, что  $D_{\text{ef}} \gg D(T_*) \sim T_*^{-3/2}$ ), но и с сильным сжатием нейтрального слоя потоком натекающей на него плазмы ( $\xi_H \ll D_*^{1/2}$ ).

Как следует из (5.10), в водородной плазме кулоновская ионная теплопроводность увеличивает эффективную магнитную вязкость плазмы примерно на порядок. Эффект может быть значительно сильнее в случае аномально большой теплопроводности (например, из-за плазменной турбулентности). Приведем соответствующую оценку для боровской теплопроводности плазмы, когда  $\kappa_{\perp} \sim \sim ncT/(eB)$ . Тогда вместо условия (5.5) имеем:

$$\kappa_{\perp} \frac{dT}{d\xi} \sim (\omega_{He} \tau_e)_0 \frac{nT}{B} \frac{dT}{d\xi} \sim (\omega_{He} \tau_e)_0 T_*^2 \xi_T^{-1} \sim v_0,$$

откуда, используя (5.6)—(5.8), получаем, что в этом случае

$$D_{\text{ef}} \sim D_0 (\omega_{He} \tau_e)_0^{5/11} \gg D_0. \quad (5.11)$$

Еще одним источником выноса теплового потока из нейтрального слоя является излучение плазмы. Остановимся здесь на случае, когда главную роль играют тормозные потери, так что объемная мощность излучения  $Q_{\text{rad}} \sim n^2 T^{1/2}$ . Полная мощность радиационных потерь возрастает с увеличением толщины нейтрального слоя и при  $\Delta x \sim \left( \frac{c^2}{4\pi\sigma} \tau_{\text{rad}} \right)^{1/2}$  (где  $\tau_{\text{rad}} \sim nT/Q_{\text{rad}}$  — характерное радиационное время) сравнивается с энергией джоулева нагрева плазмы. После этого теплопроводность плазмы уже не играет заметной роли и джоулева диссипация в нейтральном слое компенсируется излучением. Проводимость плазмы  $\sigma \propto T^{3/2}$ , а в случае тормозного излучения и время  $\tau_{\text{rad}} \propto T^{3/2}$  при заданном давлении плазмы  $nT \sim \sim B_0^2/(8\pi)$ , поэтому толщина нейтрального слоя остается уже постоянной. Приток же плазмы в нейтральный слой приводит к росту плотности (и соответственно уменьшению температуры плазмы)

$$\Delta x \, dn/dt \sim n_0 v. \quad (5.12)$$

Из условия энергобаланса  $v B_0^2/(4\pi) \sim Q_{\text{rad}} \Delta x$  следует, что скорость втекания плазмы в нейтральный слой

$$v \sim (D_0/\tau_0)^{1/2} (n/n_0)^{3/2}. \quad (5.13)$$

Тогда из (5.12) и (5.13) следует, что

$$v \sim (D_0/\tau_0)^{1/2} (1 - t/(2\tau_0))^{-3}. \quad (5.14)$$

Таким образом, аннигиляция встречных магнитных полей приобретает в этом случае взрывной характер, и скорость этого процесса может стать порядка альфвеновской скорости за время, равное нескольким радиационным временам.

Такой характер эволюции нейтрального слоя сохраняется и для других типов радиационных потерь. Так, быстрый распад плазменной конфигурации с обращенным магнитным полем, вызванный ростом излучения из плазмы при ее загрязнении примесями, наблюдался в экспериментах [41].

## 6. Диффузия тяжелых примесей в плотной плазме

Хорошо известно, что для стационарных термоядерных установок, основанных на принципе магнитного удержания разреженной плазмы, серьезной проблемой является загрязнение водородной плазмы примесями [44]. Связано это с тем, что, с одной стороны, даже небольшая (порядка 1 %) добавка тяжелых многозарядных ионов приводит к катастрофическому возрастанию радиационных потерь. С другой стороны, примеси с большим зарядом  $Z$  затягиваются электрическим полем в плазму, так что их концентрация  $\tilde{n}$  в стационарных условиях максимальна в центре плазмы [17]:

$$\nabla \tilde{n} / \tilde{n} = Z \nabla n / n.$$

Так как при немагнитном удержании плазмы с  $\beta \gg 1$  вследствие



испарения стенок камеры происходит образование тяжелых ионов с зарядом  $Z > 1$ , то для оценки их влияния на характеристики горячей плазмы важно знать глубину проникновения тяжелых примесей и распределение их плотности в плазме.

Естественно начать исследование этого вопроса с простейшего случая, когда плотность примесей относительно невелика, так что параметры плазмы мало меняются из-за их присутствия. При этом движение примесей можно рассматривать как диффузию пробных частиц в плазме, параметры которой определяются уравнениями переноса, записанными в отсутствие примесей [45]. Пусть в плазме имеется один сорт примесных ионов с заданным зарядом  $Z$ . Их массу будем считать много большей массы ионов плазмы. В результате частых столкновений тяжелых ионов с ионами плазмы функция распределения примесей по скоростям будет близка к максвелловской с температурой  $T$ , равной температуре плазмы в данной точке. Это позволяет использовать здесь гидродинамическое приближение. Движение примесей происходит в плоскости поперечного сечения плазменного цилиндра. Плотность примесей обозначим  $\tilde{n}$ , а компоненты их массовой скорости  $\tilde{v}_r$  и  $\tilde{v}_\varphi$ . Так как диффузия — медленный процесс, то в уравнениях движения примесей инерцией можно пренебречь

$$-\frac{\partial}{\partial r}(\tilde{n}T) + Z\tilde{n}e\left(E_r + \frac{\tilde{v}_\varphi}{c}B\right) + \tilde{R}_{er} + \tilde{R}_{i_r} = 0; \quad (6.1)$$

$$Z\tilde{n}e\left(E_\varphi - \frac{\tilde{v}_r}{c}B\right) + \tilde{R}_{e\varphi} + \tilde{R}_{i_\varphi} = 0. \quad (6.2)$$

Здесь  $E_r$  и  $E_\varphi$  — компоненты напряженности электрического поля в плазме, а  $\tilde{R}_e$  и  $\tilde{R}_i$  — силы, действующие на тяжелые ионы в результате их кулоновских столкновений с электронами и ионами плазмы. В силу аксиальной симметрии задачи все параметры плазмы зависят только от радиуса и времени. Функции  $n(r, t)$ ,  $T(r, t)$ ,  $B(r, t)$ ,  $E_r(r, t)$ ,  $E_\varphi(r, t)$  и  $V(r, t)$  (где  $V$  — радиальная скорость течения плазмы) предполагаются известными из решения уравнений переноса чистой плазмы.

Перейдем теперь к вычислению сил  $\mathbf{R}_e$  и  $\mathbf{R}_i$ , связанных со столкновениями. Они возникают как из-за относительного движения частиц различных сортов, так и вследствие искажения максвелловского распределения по скоростям электронов и ионов плазмы, связанного с неоднородностью параметров плазмы. Рассматривая тяжелые ионы как пробные частицы, можно пренебречь их влиянием на функции распределения электронов и ионов плазмы. Тогда электронная составляющая силы трения  $\tilde{R}_e$  получается простым обобщением приведенных в [17] выражений для силы взаимодействия электронов и ионов в водородной плазме:

$$\tilde{R}_{er} = Z^2\tilde{n}^r \left\{ m_e v_e (V - \tilde{v}_r) + \delta_5 \frac{\partial T}{\partial r} + \delta_4 m_e v_e \mu \right\}; \quad (6.3)$$

$$\tilde{R}_{e\varphi} = Z^2\tilde{n}^r \left\{ -m_e v_e \tilde{v}_\varphi + \delta_1 m_e v_e \mu + \delta_2 \frac{\partial T}{\partial r} \right\}, \quad (6.4)$$

где  $\nu_e$  — электронная частота столкновений;  $u = (c/4\pi ne) \partial B / \partial r$  — азимутальная токовая скорость электронов, а

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= 1 - \frac{6,42x_e^2 + 1,84}{\Delta_e}; & \delta_2 &= \frac{1,5x_e^2 + 3,05x_e}{\Delta_e}; \\ \delta_4 &= \frac{1,7x_e^3 + 0,78x_e}{\Delta_e}; & \delta_5 &= \frac{5,1x_e^2 + 2,68}{\Delta_e}; \\ \Delta_e &= x_e^4 + 14,79x_e^2 + 3,77; & x_e &= \omega_{He}/\nu_e, \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

где  $\omega_{He} = eB/(mc)$  — электронная циклотронная частота.

Здесь предполагается, что в плазме отсутствует вращение, так что азимутальная составляющая скорости ионов плазмы равна нулю. Учет вращения плазмы никак не влияет на радиальную диффузию примесей, поэтому мы и ограничимся только этим случаем. Если масса примесных ионов много больше массы ионов плазмы, то ионная составляющая силы трения  $\tilde{R}_i$  не зависит от искажения функции распределения по скоростям тяжелых ионов, так что масса последних вообще не входит в задачу. Поэтому вклад в  $\tilde{R}_i$ , связанный с относительным движением двух сортов ионов, можно написать сразу:

$$\tilde{R}_{ir}^{(u)} = Z^2 \tilde{n} m_i \nu_i (V - \tilde{v}_r); \quad (6.6)$$

$$\tilde{R}_{i\phi}^{(u)} = -Z^2 \tilde{n} m_i \nu_i \tilde{v}_\phi,$$

где  $m_i$  — масса ионов плазмы.

Специальное вычисление необходимо лишь при определении термосилы  $\tilde{R}_i^{(T)}$ , действующей со стороны ионов плазмы на примеси. Дело в том, что при вычислении «обычной» электрон-ионной термосилы искажение функции распределения электронов, вызванное градиентом температуры, определяется как электрон-электронными, так и электрон-ионными столкновениями. В нашем же случае соответствующая поправка к функции распределения по скоростям ионов плазмы связана только с ион-ионными столкновениями. Результат получается следующим (вычисления приведены в приложении):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{R}_i^{(T)} &= Z^2 \tilde{n} \{ \delta_6 \nabla_\perp T - \delta_7 [\mathbf{h} \times \nabla T] \}; \\ \delta_6 &= \frac{1,34x_i^2 + 0,38}{\Delta_i}; & \delta_7 &= \frac{1,5x_i^3 + 0,74x_i}{\Delta_i}; \\ \Delta_i &= x_i^4 + 1,35x_i^2 + 0,17; & x_i &= \omega_{Hi}/\nu_i; \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Входящую в уравнения (6.1) и (6.2) напряженность электрического поля можно выразить через параметры плазмы  $n$ ,  $T$ ,  $V$  и индукцию магнитного поля  $B$ , используя уравнения движения для

электронов и ионов:

$$\left. \begin{aligned} -\nabla(nT) - ne \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right\} + \mathbf{R}_{ei} &= 0; \\ -\nabla(nT) + ne \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \times \mathbf{B}] \right\} - \mathbf{R}_{ei} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

и учитывая, что направленная скорость электронов  $\mathbf{v}_e = \mathbf{V} - \mathbf{j}/(ne)$ . Тогда из (6.8) и (6.5) следует, что

$$\left. \begin{aligned} eE_r &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial r} (nT) - \delta_4 \frac{m_e v_e c}{4\pi n e} \frac{\partial B}{\partial r} - \delta_5 \frac{\partial T}{\partial r}; \\ eE_\varphi &= eB \frac{V}{c} - \delta_1 \frac{m_e v_e c}{4\pi n e} \frac{\partial B}{\partial r} - \delta_2 \frac{\partial T}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (6.9)$$

Зная теперь все действующие на тяжелые ионы силы, из уравнений (6.1) и (6.2) можно найти скорость их течения, а из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tilde{n} \tilde{v}_r) = 0 \quad (6.10)$$

распределение по радиусу плотности примесей  $\tilde{n}(r, t)$ .

Прежде чем приводить получающиеся здесь решения, обсудим некоторые общие свойства движения тяжелых многозарядных ионов в неоднородной плазме. Начнем с самого простого случая, когда в неподвижной замагниченной плазме с однородной температурой имеется градиент плотности. Тогда, как это следует из уравнений (6.1) и (6.9), радиальное электрическое поле затягивает примеси внутрь плазмы, так что в равновесии их концентрация удовлетворяет хорошо известному [17] соотношению:

$$\frac{\partial \ln \tilde{n}}{\partial r} = Z \frac{\partial \ln n}{\partial r}, \quad (6.11)$$

т. е. плотность примесей имеет резкий максимум в центре плазменного столба. Картина, однако, становится более сложной, если в плазме имеется градиент температуры, так что на примеси действуют дополнительные силы — термосилы  $\tilde{\mathbf{R}}_e^{(T)}$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_i^{(T)}$ . Так как значение и направление термосилы существенно зависят от соотношения между циклотронной частотой и частотой столкновений частиц, то результат оказывается разным для незамагниченной ( $\omega_{H\tau} < 1$ ) и сильно замагниченной ( $\omega_{H\tau} \gg 1$ ) плазмы. В последнем случае главную роль играет составляющая ионной термосилы  $\tilde{\mathbf{R}}_i^{(T)}$ , поперечная к магнитному полю и градиенту температуры [см. формулу (6.7)]

$$\tilde{\mathbf{R}}_i^{(T)} \approx -\frac{3}{2} \frac{Z^2 \tilde{n}}{(\omega_{Hi} \tau_i)} [\mathbf{h} \times \nabla T], \quad (6.12)$$

которая приводит к выталкиванию примесей из горячей плазмы [45—47]. Этот эффект получил название температурной экрани-

ровки примесей. Механизм его следующий. Под действием термосилы (6.12) тяжелые ионы приходят в движение относительно плазмы, причем их скорость  $\tilde{\mathbf{v}}$  устанавливается такой, чтобы возникающая сила трения об ионы плазмы компенсировала действие термосилы:

$$-\frac{3}{2} \frac{Z^2 \tilde{n}}{(\omega_{Hi} \tau_i)} [h \times \nabla T] - \frac{Z^2 \tilde{n} m_i \tilde{\mathbf{v}}}{\tau_i} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \tilde{\mathbf{v}} = -\frac{3c}{2eB} [h \times \nabla T].$$

В результате этого движения на ионы примеси действует сила Лоренца, выталкивающая их из горячей плазмы:

$$\mathbf{F}_L = \frac{Z \tilde{n} e}{c} [\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}] = -\frac{3}{2} Z \tilde{n} \nabla T. \quad (6.13)$$

С учетом этого для равновесной концентрации многозарядных ( $Z \gg 1$ ) примесей вместо уравнения (6.11) получается следующее условие:

$$\frac{\partial \ln \tilde{n}}{\partial r} = Z \left\{ \frac{\partial \ln(nT)}{\partial r} - \frac{3}{2} \frac{\partial \ln T}{\partial r} \right\}. \quad (6.14)$$

Отсюда видно, что если в плазме с малым  $\beta$  суммарный эффект зависит от соотношения градиентов температуры и плотности, то в плазме с большим  $\beta$ , когда  $\partial(nT)/\partial r \approx 0$ , тяжелые примеси выталкиваются из горячей замагниченной плазмы. Наоборот, в незамагниченной плазме, когда параметр  $\omega_{HT} < 1$ , электронная и ионная составляющие термосилы, как видно из формул (6.3) и (6.7), одного порядка:

$$\tilde{\mathbf{R}}^{e(T)} \sim \tilde{\mathbf{R}}^{(T)} \sim Z^2 \tilde{n} \nabla T$$

и направлены так, что затягивают примеси в область более горячей плазмы. Отсюда следует, что образующиеся у стенок камеры тяжелые ионы стремятся сконцентрироваться в области холодной пристеночной плазмы, где параметр замагниченности ионов плазмы  $\omega_{Hi} \tau_i \sim 1$ .

Вернемся теперь к решению уравнений (6.1), (6.2) и (6.10) для распределения плотности примесей. Поскольку в общем случае формулы довольно громоздки, приведем результат для многозарядных ионов, когда  $Z \gg 1$ . В этом случае радиальную составляющую скорости примесей  $\tilde{v}_r$  можно представить в виде:

$$\tilde{v}_r = \tilde{V} - D \frac{1}{\tilde{n}} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial r}, \quad (6.15)$$

где  $D = T \tau_i / Z^2 m_i (1 + \omega_{Hi}^2 \tau_i^2 / Z^2)$  — коэффициент диффузии примесей, а  $\tilde{V}$  — величина, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \tilde{V} = V + (1 + \omega_{Hi}^2 \tau_i^2 / Z^2)^{-1} & \left\{ \frac{\tau_i}{Z m_i n} \frac{\partial}{\partial r} (nT) + \frac{c}{4\pi n e} \frac{\partial B}{\partial r} \left[ \delta_4 (m_e / m_i)^{1/2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\delta_1 (\omega_{He} \tau_e)}{Z} \frac{m_e}{m_i} \right] + \frac{\tau_i}{m_i} \frac{\partial T}{\partial r} \left[ (\delta_5 + \delta_6) + \frac{(\delta_2 - \delta_7)}{Z} \omega_{Hi} \tau_i \right] \right\}. \quad (6.16) \end{aligned}$$

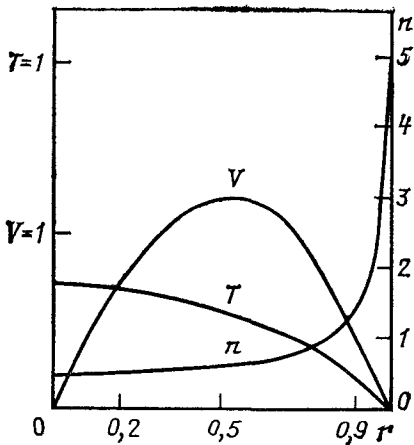


Рис. 16. Радиальные распределения плотности  $n$ , температуры  $T$  и скорости плазмы  $V$  при ее нагреве мощным релятивистским электронным пучком через  $2,1 \cdot 10^{-5}$  с после начала нагрева ( $n=1,6 \cdot 10^{18}$  см $^{-3}$ ;  $T=4$  кэВ;  $B=7$  Тл;  $V=2 \cdot 10^4$  см/с;  $R=1,2$  см)

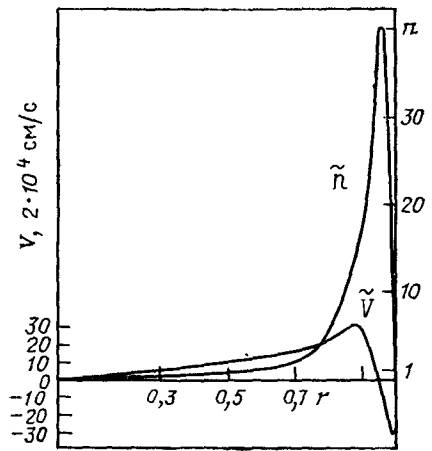
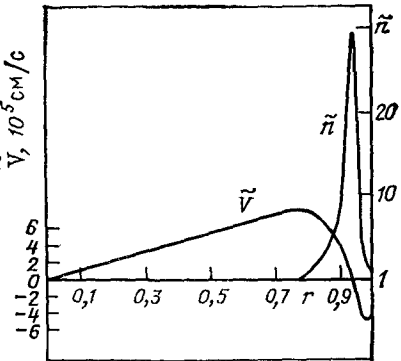


Рис. 17. Радиальное распределение плотности  $\tilde{n}$  примесей с зарядом  $Z=3$  и эффективной скорости среды  $\tilde{V}$  через  $2,1 \cdot 10^{-5}$  с после начала нагрева плазмы

Таким образом, движение примесей представляет собой диффузию с коэффициентом  $D$  в среде, движущейся со скоростью  $\tilde{V}$ , которая, как это следует из (6.16), не совпадает со скоростью течения плазмы  $V$ . Это приводит к особенностям в распределении по радиусу плотности примесей  $\tilde{n}(r)$ .



Действительно, рассмотрим выражение (6.16) для эффективной скорости  $\tilde{V}$ . Сравнение входящих сюда слагаемых показывает, что вблизи стенки главным оказывается последний член в правой части (6.16), связанный с действием на примеси термосилы. Так как у самой стенки, где плазма не замагничена, термосила затягивает примеси, там эффективная скорость  $\tilde{V}$  направлена внутрь плазмы ( $\tilde{V} < 0$ ).

Рис. 18. Радиальное распределение плотности  $\tilde{n}$  примесей с зарядом  $Z=10$  и эффективной скорости среды  $\tilde{V}$  через  $2,1 \cdot 10^{-5}$  с после начала нагрева

В замагниченной же плазме примеси выталкиваются. Поэтому на некотором малом расстоянии от стенки  $a$  ( $a \ll R$ ) эффективная скорость обращается в нуль, а затем меняет знак и становится направленной от центра к стенке ( $\tilde{V} > 0$ ).

В качестве простейшей модели образования примесей рассмотрим ситуацию, когда их плотность у стенок не зависит от времени.

В этом случае нетрудно представить вид функций  $\tilde{n}(r)$  при указанном выше виде эффективной скорости  $\tilde{V}(r)$ . Поскольку плазма у стенки имеет высокую плотность и низкую температуру, коэффициент диффузии примесей  $D$  здесь мал. Поэтому почти во всем промежутке от стенки до точки остановки в выражении (6.15) для  $\tilde{v}_r$  можно пренебречь диффузионной скоростью. Так как параметры плазмы меняются медленно по сравнению со временем, в течение которого тяжелые ионы со скоростью  $\tilde{V}$  пройдут расстояние  $a$  от стенки, то можно считать, что в каждый момент времени распределение плотности примесей по радиусу  $\tilde{n}(r)$  близко к стационарному решению уравнения непрерывности (6.10), т. е.  $\tilde{n} \propto \tilde{V}^{-1}$ . Только у самой точки остановки необходимо учитывать диффузию.

Таким образом, плотность примесей растет от стенки до точки остановки, где она имеет резкий максимум. При дальнейшем удалении от стенки  $\tilde{n}$  быстро уменьшается. Эти качественные соображения подтверждаются приведенными на рис. 16—18 результатами численного интегрирования уравнения диффузии примесей совместно с уравнениями переноса плазмы с  $\beta \gg 1$ . Из рисунков видно, что хотя плотность примесей и имеет резкий максимум в пристеночном слое, их проникновение в объем горячей плазмы сильно подавлено.

## 7. Радиационная неустойчивость многокомпонентной плазмы

Рассмотрим специфическую радиационную неустойчивость, возникающую в водородной плазме с примесью тяжелых ионов. Хотя обычно присутствие в плазме примесей нежелательно (так что задача состоит в уменьшении потока примесных ионов со стенок или их эффективном удалении из плазмы), в некоторых случаях тяжелые многозарядные примеси могут играть и полезную роль. Так, с их помощью можно изменять частоту кулоновских столкновений частиц и тем самым коэффициенты переноса в плазме. В плазме с термоядерным энерговыделением излучение на примесях может быть использовано для стабилизации различных тепловых неустойчивостей. Как для защиты плазмы от примесей, так и для их полезного использования важно знать характер движения примесей в плазме и распределение их плотности. В этой связи в [48] было обращено внимание на возможность разбиения первоначально однородной многокомпонентной плазмы на отдельные сгустки с большой концентрацией примесей. Такое разбиение происходит в результате радиационной неустойчивости, связанной с обсуждавшимся выше эффектом температурной экранировки примесей.

Пусть имеется однородная плазма с температурой  $T$ , состоящая из двух сортов ионов: легких (водородных) ионов с массой  $m_i$ , плотностью  $n_i$  и единичным зарядом и тяжелых ионов с массой  $\tilde{m}$ , плотностью  $\tilde{n}$  и зарядом  $Z \gg 1$  (очевидно, что при этом  $\tilde{m} \gg m_i$ ). Будем считать, что относительная плотность тяжелых (примесных) ионов  $\tilde{n}/n_i$  удовлетворяет следующим условиям:

$$1/Z^2 \ll \tilde{n}/n_i \ll 1/Z. \quad (7.1)$$

Первое из этих неравенств означает, что кулоновское рассеяние на примесях определяет частоту столкновений частиц в плазме, в то время как второе показывает, что плазма остается при этом почти чисто водородной, так что  $n_e \approx n_i = n$ . Плазма считается помещенной в сильное однородное магнитное поле, которое делает ее замагниченной настолько, что параметр  $\omega_{H_i} \tau_i \gg Z$ . Так как плазма предполагается оптически прозрачной, то ее излучение незаперто, что и является источником неравномерности, приводящим к неустойчивости. Механизм развития неустойчивости следующий: мощность излучения из единицы объема плазмы  $Q_r$  пропорциональна плотности примесных ионов  $\tilde{n}$ , поэтому флуктуационное увеличение их плотности  $\delta \tilde{n} > 0$  в некотором месте приводит к локальному понижению температуры  $\delta T < 0$ ; но так как в замагниченной плазме термосила (6.12) выталкивает тяжелые ионы из горячей плазмы в более холодную, то начальная флуктуация будет нарастать со временем. Более того, как это будет показано в дальнейшем, характерное время развития такой неустойчивости может быть гораздо меньше радиационного времени остывания плазмы.

Перейдем теперь к количественному описанию этой радиационной неустойчивости, которое можно разделить на два этапа. Сначала из уравнений движения и непрерывности для разных сортов частиц и уравнений Максвелла для полей определяются изменения плотности всех компонентов плазмы, вызванные температурными флуктуациями. Затем из уравнения теплового баланса плазмы находится инкремент неустойчивости. Так как характерное время развития неустойчивости, как это будет видно из дальнейшего, много больше времени теплообмена между различными компонентами плазмы, то температуру последних можно считать одинаковой (заметим, что присутствие в плазме примесей ускоряет теплообмен между электронами и ионами). Итак, запишем основные уравнения:

$$n_e m_e \frac{dv_e}{dt} = -\nabla(n_e T) - \frac{n_e e}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] - n_e e \mathbf{E}; \quad (7.2)$$

$$n_i m_i \frac{dv_i}{dt} = -\nabla(n_i T) + \frac{n_i e}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] + n_i e \mathbf{E} - \mathbf{R}_T - \mathbf{R}_u; \quad (7.3)$$

$$\tilde{n} \tilde{m} \frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{dt} = -\nabla(\tilde{n} T) + \frac{Z \tilde{n} e}{c} [\tilde{\mathbf{v}} \times \mathbf{B}] + Z \tilde{n} e \mathbf{E} + \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_u; \quad (7.4)$$

$$\partial n_\alpha / \partial t + \operatorname{div}(n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0; \quad (7.5)$$

$$n_e = n_i + Z \tilde{n}; \quad (7.6)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = (4\pi e/c) (n_i \mathbf{v}_i + Z \tilde{n} \tilde{\mathbf{v}} - n_e \mathbf{v}_e); \quad (7.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -(1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t. \quad (7.8)$$

Здесь  $\mathbf{R}_T$  и  $\mathbf{R}_u$  обозначают термосилу и силу трения между тяжелыми и легкими ионами, в то время как соответствующие электронные вклады пренебрежимо малы (в пределе  $m_e \rightarrow 0$ ). Зависимость возмущений температуры и всех других величин от координат и времени выберем, как обычно, в виде  $\delta T \propto \exp(ikr + \gamma t)$ , и за-

пишем уравнения (7.2) — (7.8) в линейном (по возмущениям) приближении. Очевидно, что теплопроводность плазмы сглаживает температурные возмущения и является поэтому стабилизирующим фактором. Учитывая, что она очень велика вдоль магнитного поля, будем рассматривать только поперечные по отношению к магнитному полю возмущения, для которых  $\mathbf{k} \perp \mathbf{B}$ . Пусть вектор  $\mathbf{k}$  направлен вдоль оси  $x$ , а магнитное поле — вдоль  $z$ , так что движение плазмы происходит в плоскости  $(x, y)$ . Используя полученные ниже результаты, легко проверить, что инерция частиц не играет заметной роли в развитии интересующих нас возмущений. Тогда из уравнений (7.2) — (7.4) и (7.7) следует постоянство полного давления в системе

$$\delta \{ (n_e + n_i + \tilde{n}) T + B^2 / (8\pi) \} = 0. \quad (7.9)$$

Рассмотрим в отдельности случай разреженной плазмы, для которой  $\beta = 8\pi n T / B^2 \ll 1$ , и плотную плазму, когда  $\beta \gg 1$ . Начнем с первого случая, для которого из уравнения (7.9) следует равенство нулю возмущения магнитного поля  $\delta \mathbf{B} = 0$ . Тогда из (7.8) получаем, что  $E_y = 0$ , а из  $y$ -компоненты уравнений (7.2)  $v_{ex} = 0$ . Это означает, что вместе с индукцией магнитного поля не меняется и плотность электронов, т. е.  $\delta n_e = 0$ . Тогда условие квазинейтральности  $\delta n_i = -Z \delta \tilde{n}$  и уравнения непрерывности для легких и тяжелых ионов показывают, что

$$\delta n_i = -\frac{ik}{\gamma} n_i v_{ix}; \quad \delta \tilde{n} = -\frac{ik}{\gamma} \tilde{n} \tilde{v}_x; \quad v_{ix} = -\frac{\tilde{Z} \tilde{n}}{n} \tilde{v}_x \ll \tilde{v}_x. \quad (7.10)$$

Компоненты скорости ионов вдоль оси  $y$  удовлетворяют условию отсутствия у плазмы полного импульса в этом направлении:

$$n_i m_i v_{iy} + \tilde{n} \tilde{m} \tilde{v}_y = 0, \quad \text{т. е.} \quad v_{iy} = -\frac{\tilde{n} \tilde{m}}{n_i m_i} \tilde{v}_y \ll \tilde{v}_y \quad (7.11)$$

(здесь считается, что  $\tilde{m}/m_i \sim Z$ ).

Для определения скорости примесных ионов  $\tilde{v}_x$ ,  $\tilde{v}_y$  и возникающего в плазме поляризованного электрического поля  $E_x$  запишем линеаризованные  $x$ -компоненты уравнений (7.3) и (7.4) и  $y$ -компоненту уравнения (7.4) и используем соотношения (7.10) и (7.11):

$$-ikn\delta T + \frac{k^2 T}{\gamma} Z \tilde{n} \tilde{v}_x - \frac{eB}{c} \frac{\tilde{n} \tilde{m}}{m_i} \tilde{v}_y + neE_x + \frac{m_i n \tilde{v}_x}{\tau_i} = 0; \quad (7.12)$$

$$-ik\tilde{n}\delta T - \frac{k^2 T}{\gamma} \tilde{n} \tilde{v}_x + \frac{Z \tilde{n} e B}{c} \tilde{v}_y + Z \tilde{n} e E_x - \frac{m_i n \tilde{v}_x}{\tau_i} = 0; \quad (7.13)$$

$$-\frac{Z \tilde{n} e B}{c} \tilde{v}_x - \frac{3}{2} ik \frac{n}{\omega_{Hi} \tau_i} \delta T - \frac{m_i n \tilde{v}_y}{\tau_i} = 0. \quad (7.14)$$

После простых вычислений отсюда получается следующее выражение для возмущения плотности тяжелых ионов:

$$\frac{\delta \tilde{n}}{\tilde{n}} = -\frac{ik \tilde{v}_x}{\gamma} = -\frac{k^2 \tau_i^2}{2\gamma \tau_i [1 + k^2 \tau_i^2 / (\gamma \tau_i)]} \frac{n}{Z \tilde{n}} \frac{\delta T}{T}. \quad (7.15)$$



Здесь  $r_{Hi}^2 = T / (m_i \omega_{Hi}^2)$  и учтены неравенства (7.1) и условие, что  $\omega_{Hi} \tau_i \gg Z \gg 1$ . Отсюда видно, что для достаточно коротковолновых возмущений относительное изменение плотности примесей  $\delta \tilde{n} / \tilde{n}$  не зависит от волнового вектора  $k$  и намного больше относительного возмущения температуры плазмы  $\delta T / T$ , а именно:  $\delta \tilde{n} / \tilde{n} \approx -(n / 2 \tilde{n} Z) \delta T / T$ . В этом случае действующая на примеси сила Лоренца (6.13) уравнивается электрическим полем  $E_x$ , которое выталкивает ионы плазмы из областей с пониженной температурой и устанавливается таким, чтобы компенсировать градиент их давления [см. (7.12)]. Запишем теперь уравнение теплового баланса плазмы; в данном случае оно получается просто сложением соответствующих уравнений для каждой из компонент [17]:

$$\sum_{\alpha} \left\{ \frac{3}{2} n_{\alpha} \frac{dT}{dt} - T \frac{dn_{\alpha}}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{q}_{\alpha} + Q_{\text{rad}} \right\} = 0. \quad (7.16)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  — микроскопический тепловой поток, главный вклад в который вносит поперечная к магнитному полю теплопроводность легких ионов. Так как рассеяние легких ионов примесями ничем не отличается от рассеяния электронов на ионах в «чистой» плазме, для нахождения коэффициента теплопроводности можно использовать вычисленное в [17] значение электронной теплопроводности в плазме с большим зарядом ионов ( $Z \rightarrow \infty$ ):  $\mathbf{q}_i = -\kappa_i \nabla_{\perp} T$ ,  $\kappa_i = 3,25 n_i r_{Hi}^2 / \tau_i$ .

Мощность излучения из плазмы  $Q_r$  есть некоторая функция температуры, умноженная на плотность электронов и примесных ионов  $Q_{\text{rad}} = n_e \tilde{n} f(T)$ . Очевидно, что быстрее всего будут нарастать такие возмущения, для которых приращение  $\delta \tilde{n}$  максимально. Но, как уже отмечалось, для них  $\delta \tilde{n} / \tilde{n} \gg \delta T / T$ . Поэтому при таких возмущениях изменение мощности излучения  $\delta Q_{\text{rad}} \approx Q_{\text{rad}} \delta \tilde{n} / \tilde{n}$ . В результате после линеаризации уравнения (7.16) получается следующее значение инкремента неустойчивости:

$$\gamma \approx \frac{3}{5 \tau_{\text{rad}}} \frac{n}{Z \tilde{n}} \left( 1 - k^2 r_{Hi}^2 \frac{\tau_{\text{rad}}}{\tau_i} \frac{2 Z \tilde{n}}{n} \right), \quad (7.17)$$

где  $\tau_{\text{rad}} = 3nT / Q_{\text{rad}}$  — радиационное время остывания плазмы.

Это выражение справедливо для наиболее интересной области длин волн возмущений, когда  $k^2 r_{Hi}^2 \sim (\tau_i / \tau_{\text{rad}}) (n / Z \tilde{n})$ . При меньших значениях  $k$  уменьшается инкремент неустойчивости, а более коротковолновые возмущения затухают из-за теплопроводности плазмы.

Обсудим теперь зависимость пространственного масштаба и времени нарастания самых неустойчивых возмущений от плотности примесных ионов. Так как при  $\tilde{n} / n \gg 1 / Z^2$  как время рассеяния ионов  $\tau_i$ , так и радиационное время  $\tau_{\text{rad}}$  обратно пропорциональны  $\tilde{n}$ , то инкремент  $\gamma$  в этом случае не зависит от плотности примесей, а длина волны  $\lambda \propto \tilde{n}^{1/2}$ . Если же  $\tilde{n} / n < 1 / Z^2$ , то наличие примесей не влияет на время рассеяния частиц, хотя излучение из плазмы может быть по-прежнему связано с их присутствием. Так происхо-

дит, например, когда тяжелые ионы не полностью ионизованы и излучение связано с их возбуждением при столкновениях с электронами. Легко проверить, что все приведенные выше соотношения справедливы и для этого случая, если в них параметр  $n/(Z\tilde{n})$  заменить величиной  $Z$ . Тогда  $\gamma \propto \tilde{n}$ , а  $\lambda \propto \tilde{n}^{-1/2}$ . Отсюда следует, что рассматриваемая неустойчивость проявляется наиболее сильно, когда  $\tilde{n}/n \sim 1/Z^2$ . В этом случае инкремент и длина волны имеют следующий порядок:

$$\gamma \sim Z/\tau_{\text{rad}}; \quad \lambda \sim r_{Hi} (\tau_{\text{rad}}/Z\tau_i)^{1/2}, \quad (7.18)$$

где  $\tau_i \approx 3 \cdot 10^6 T^{3/2}/n$  — время рассеяния ионов в водородной плазме. Используя приведенные в [49] данные по излучению плазмы с примесями, можно получить, что при  $\tilde{n}/n \sim 1/Z^2$  и температуре плазмы  $T \sim 10^3 - 10^4$  эВ радиационное время  $\tau_{\text{rad}}$  лежит в интервале  $\tau_{\text{rad}} \approx (10^{12} - 10^{14})/n$ . Подставляя эти значения в формулы (7.18), получаем, что минимальный размер таких сгустков тяжелых ионов может составлять несколько ионных ларморовских радиусов, а образуются они за время, много меньшее радиационного времени остывания плазмы.

В случае разреженной плазмы ( $\beta \ll 1$ ) нетрудно оценить, до какого уровня нарастают начальные возмущения плотности примесей. Так как в этом случае плотность электронов плазмы не изменяется, то верхний предел по плотности тяжелых ионов определяется их пространственным зарядом, так что  $(\delta\tilde{n})_{\text{max}} \sim n/Z$ . Температура такого сгустка уменьшается при этом на величину порядка единицы:  $\delta T \sim T$ .

Перейдем теперь к случаю плотной плазмы ( $\beta \gg 1$ ), когда магнитное поле влияет только на поперечную теплопроводность плазмы, а его давлением можно пренебречь. Тогда, как это следует из выражения (7.9), возмущения не влияют на газокинетическое давление плазмы, так что локальные изменения температуры вызывают соответствующие изменения плотности, т. е. плазма приходит в движение. Условие постоянства давления можно записать в виде:

$$2n\delta T = -T(2\delta n_i + Z\delta\tilde{n}). \quad (7.19)$$

Вместе с уравнениями непрерывности для двух сортов ионов это позволяет определить их скорости  $v_{ix}$  и  $\tilde{v}_x$ . При движении плазмы возникает индукционное электрическое поле  $E_y$ . Из  $y$ -компоненты уравнения (7.2) и условия квазинейтральности находим, что

$$E_y = \frac{B}{c} \left( v_{ix} + \frac{Z\tilde{n}}{n} \tilde{v}_x \right). \quad (7.20)$$

После этого из системы уравнений, аналогичной (7.12) — (7.14), определяется интересующее нас изменение плотности примесей

$$\frac{\delta\tilde{n}}{\tilde{n}} = -\frac{\delta T}{T} \frac{1 + (3/2) k^2 r_{Hi}^2 n / \gamma \tau_i Z\tilde{n}}{1 + k^2 r_{Hi}^2 / (2\gamma \tau_i)}. \quad (7.21)$$

Качественно этот результат можно пояснить следующим образом. При малых значениях волнового вектора  $k$  примеси вморожены в магнитное поле и движут-

ся вместе с плазмой ( $\delta\bar{n}/\bar{n} \approx \delta n/n \approx -\delta T/T$ ). С уменьшением длины волны возмущений становится существенной термосила, которая увеличивает относительное возмущение плотности тяжелых ионов, так что при больших  $k$  величина  $\delta\bar{n}/\bar{n}$  принимает постоянное значение (как и в случае плазмы с малым  $\beta$ ). Соответственно не меняется порядок и всех полученных при  $\beta \ll 1$  результатов. Например, инкремент неустойчивости

$$\gamma \approx \frac{9}{5\tau_{\text{rad}}} \frac{n}{\bar{Z}\bar{n}} \left( 1 - k^2 r_{Hi}^2 \frac{\tau_{\text{rad}}}{\tau_i} \frac{\bar{Z}\bar{n}}{3n} \right). \quad (7.22)$$

Остается справедливой, в частности, и оценка верхней границы плотности примесей в сгустке:  $(\delta\bar{n})_{\text{max}} \sim n/Z$ . Стабилизация возникает в этом случае за счет электрического поля  $E_x$ , которое выталкивает тяжелые ионы из области с пониженной температурой.

В заключение отметим, что рассмотренная здесь радиационная неустойчивость может иметь место не только в прямом магнитном поле, но и в других конфигурациях, где есть эффект температурной экранировки ионов. Так, в тороидальной плазме такая неустойчивость возможна в режиме редких столкновений [50] (так называемый банановый режим), но отсутствует в режиме Пфирша — Шлютера [51].

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем здесь вычисление термосилы  $\bar{\mathbf{R}}_i^{(T)}$ , действующей со стороны ионов плазмы на примеси. Эта сила возникает из-за искажения функции распределения по скоростям ионов плазмы, связанного с неоднородностью их температуры. Соответственно этому представим функцию распределения ионов  $f_i(\mathbf{v}, \mathbf{r})$  в виде  $f_i = f_{oi}(1 + \Phi)$ , где  $f_{oi} = n/(2\pi T/m_i)^{3/2} \exp(-m_i v^2/(2T))$  — максвелловское распределение, а  $\Phi$  — малая поправка, определяемая из кинетического уравнения

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_i c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} = C_{ii}(f_i, f_i). \quad (\text{П.1})$$

Здесь  $C_{ii}$  — ион-ионный столкновительный член, равный [17]

$$C_{ii}(f_1, f_2) = -\frac{2\pi\Lambda e^4}{m_i^2} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int d^3v' \left\{ f_1(\mathbf{v}) \frac{\partial f_2(\mathbf{v}')}{\partial v'_\beta} - f_2(\mathbf{v}') \frac{\partial f_1(\mathbf{v})}{\partial v_\beta} \right\} U_{\alpha\beta};$$

$$U_{\alpha\beta} = (u^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) / u^3; \quad u_\alpha = v_\alpha - v'_\alpha.$$

Столкновения ионов плазмы с примесями здесь можно не учитывать, так как последние считаются пробными частицами, а влияние электронных столкновений на функцию распределения  $f_i$  мало в пределе  $m_e/m_i$ , стремящемся к нулю. Для дальнейшего удобно считать, что, кроме градиента температуры в плазме, имеется и градиент плотности, причем такой, что давление остается однородным, т. е.  $\nabla \ln T = -\nabla \ln n$ . Это позволяет не учитывать макроскопическое движение ионов и считать задачу квазистационарной. Тогда после линеаризации уравнения (П.1) получаем:

$$f_{oi} \left( \frac{m_i v^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \nabla \ln T + \omega_{Hi} f_{oi} [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{v}} = C_{ii}(f_{oi}, f_{oi}\Phi) + C_{ii}(f_{oi}\Phi, f_{oi}); \quad \mathbf{h} = \mathbf{B}/B. \quad (\text{П.2})$$

Точное решение получившегося интегрального уравнения для  $\Phi$  можно найти лишь численными методами. Поэтому воспользуемся здесь хорошо известным приемом разложения искомой поправки по системе ортогональных функций [17], в качестве которых удобно взять полиномы Сонина — Лагерра  $L_k^{(3/2)}$ . Прежде всего заметим, что из-за симметрии задачи поправка к функции распределения ионов  $\Phi$  должна иметь следующий вид:

$$\Phi(v) = v \{ A(v^2) \nabla_{\parallel} \ln T + B(v^2) \nabla_{\perp} \ln T + C(v^2) \omega_{Hi} [\mathbf{h} \times \nabla \ln T] \}, \quad (\text{П.3})$$

где  $\nabla_{\parallel} \ln T$  и  $\nabla_{\perp} \ln T$  — компоненты вектора  $\nabla \ln T$  вдоль и поперек магнитного поля. Не уменьшая общности, достаточно рассмотреть случай поперечного градиента температуры, так как выражение для коэффициента  $A(v^2)$  должно получаться из  $B(v^2)$  в пределе  $\omega_{Hi} = 0$ . Введя комплексную величину  $D(v^2) = B + i\omega_{Hi}C$ , запишем ее в виде

$$D = \tau_i \sum_{k=1}^{\infty} a_k L_k^{(3/2)}(y); \quad y = \frac{m_i v^2}{2T}; \quad \tau_i = \frac{3m_i^{1/2} T^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\Lambda e^4 n} \quad (\text{П.4})$$

(слагаемое с  $k=0$  отсутствует, так как ионы не должны иметь направленной скорости). Подставив теперь выражения (П.4) и (П.3) в уравнение (П.2), можно получить (см. [17]) бесконечную систему алгебраических уравнений для коэффициентов разложения  $a_k$ :

$$\sum_{l=1}^{\infty} \alpha_{kl} a_l + ix \frac{\Gamma(k+5/2)}{k! \Gamma(7/2)} a_k = \delta_{1k}; \quad k = 1, 2, \dots; \quad x = \omega_{Hi} \tau_i, \quad (\text{П.5})$$

где

$$\alpha_{kl} = -\frac{4\tau_i}{15n} \frac{m_i}{2T} \int L_k^{(3/2)}(y) v_{\alpha} \{ C_{ii} [f_{0i}, f_{0i} v_{\alpha} L_l^{(3/2)}(y)] + C_{ii} [f_{0i} v_{\alpha} L_l^{(3/2)}(y), f_{0i}] \} d^3v$$

— безразмерная матрица, компоненты которой приведены в [52]

$$\alpha_{kl} = \frac{4}{5\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3/4 & \dots \\ 0 & 3/4 & 45/16 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Как известно [17], достаточно хорошее приближение обеспечивается уже при ограничении первыми двумя членами разложения (П.4). Проведя соответствующие вычисления, можно получить, что

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_1' + ia_1'' = \frac{0,59x^2 + 0,38}{\Delta} - i \frac{x^3 + 0,94x}{\Delta}; \\ a_2 &= a_2' + ia_2'' = \frac{0,24x^2 - 0,1}{\Delta} + i \frac{0,36x}{\Delta}; \\ \Delta &= x^4 + 1,35x^2 + 0,17; \quad x = \omega_{Hi} \tau_i. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.6})$$

Так как масса примесных ионов много больше массы ионов плазмы, искомая термосила  $\bar{R}_i^{(T)}$  не зависит от функции распределения примесей по скоростям и полностью определяется найденной уже поправкой к функции распределения ионов плазмы  $\Phi$ . Поэтому можно воспользоваться аналогией с обычной электронной термосилой и приведенными в [52] вычислениями, согласно которым

$$\bar{R}_i^{(T)} = \frac{5}{2} Z^2 \bar{n} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha'_{0k} (a'_k \Delta_{\perp} T - a'_k [h \times \nabla T]), \quad (\text{П.7})$$

где

$$\alpha'_{ik} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 15/8 & \cdot \\ 3/2 & 13/4 & 69/16 & \cdot \\ 15/8 & 69/16 & 433/64 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Теперь, используя (П.6) и (П.7), окончательно получаем, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_i^{(T)} &= Z^2 \bar{n} \{ \delta_6 \nabla_{\perp} T - \delta_7 [h \times \nabla T] \}; \\ \delta_6 &= \frac{1,34x^2 + 0,38}{\Delta}; \quad \delta_7 = \frac{(3/2)x^3 + 0,74x}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П.8})$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алиханов С. Г., Будкер Г. И., Комин А. В. и др.//Труды VII Междунар. конф. по явлениям в ионизованных газах. Белград. 1966. Т. 1. С. 776—780.
2. Linhart J. G.//Proc. Intern. Conf. Magagauss Magnetic Fields Generated by Explosives and Related Experiments, EUR2750, Rrascati. Italy. 1965. P. 387—392.
3. Velikhov E. P.//Comments on Plasma Phys. 1972. Vol. 1(6). P. 171—178.
4. Rioux C.//Plasma Phys. Control. Nucl. Fus. Res. 1976. IAEA, Vienna. 1977. Vol. 3. P. 527—534.
5. Book D. L., Burton R. L. e. a.//Plasma Phys. Control. Nucl. Fus. Res. 1978, IAEA, Vienna. 1979. Vol. 2. P. 93—102.
6. Sherwood A. R., Cantrell E. L. e. a. Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. 1980. IAEA, Vienna. 1981. Vol. 2. P. 691.
7. Alikhanov S. G., Bahtin V. P. e. a.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna. 1981. Vol. 2. P. 699—705.
8. Бабыкин М. В., Рудаков Л. И. и др.//Физика плазмы. 1982. Т. 8(5). С. 901—914.
9. Пашинин П. П., Прохоров А. М.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1971, Т. 60(5), С. 1630—1636.  
Пашинин П. П., Прохоров А. М.//Там же. 1972. Т. 62(1) С. 189—194
10. Будкер Г. И., Мирнов В. В., Рютов Д. Д.//Письма в ЖЭТФ. 1971, Т. 14(5), С. 320—322.
11. Будкер Г. И., Данилов В. В. и др.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1973, Т. 65(2). С. 562—574.
12. Logan V., Brown J., Lichtenberg A., Liberman M.//Phys. Fluids. 1974. Vol. 17(6). P. 1302—1313.
13. Budker G. I.//Proc. VI Europ. Conf. on Plasma Phys. 1973. Vol. 2. P. 136—158.
14. Рютов Д. Д.//Успехи физ. наук. 1975 Т. 116(2). С. 341—348.
15. Dawson J. M., Hertzberg A. e. a.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. 1971. IAEA, Vienna. 1971. Vol. 1. P. 673—687.
16. Gross R. A.//Nucl. Fus. 1973. Vol. 13(2). P. 293—296.  
Gross R. A.//Nucl. Fus. 1975. Vol. 15(5). P. 729—735.

17. Брагинский С. И.//Вопросы теории плазмы: Сб. статей М.: Атомиздат, 1963. Вып. 1.
18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1954
19. Векштейн Г. Е.//Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30(9). С. 596—600.
20. Векштейн Г. Е.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1983. Т. 84(2). С. 549—563.
21. Тамм И. Е., Сахаров А. Д. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 1.
22. Векштейн Г. Е.//Докл. АН СССР. 1977. Т. 237. № 2. С. 295—298.
23. Alikhanov S. G., Konkashbaev I. K., Chebotaev P. Z.//Nucl. Fus. 1970. Vol. 10(1). P. 13—18.
24. Chebotaev P. Z., Ryutov D. D., Spector M. D., Vekstein G. E.//Proc. VI Europ. Conf. on Plasma Physics. Moscow, 1973. Vol. 1. P. 411—414.
25. Векштейн Г. Е.//Прикл. механ. и технич. физ. 1976. № 6. С. 3—8.
26. Векштейн Г. Е., Чеботаев П. З. Препринт ИЯФ СО АН СССР 80—42, Новосибирск, 1980.
27. Field G. B.//Astrophys. J. 1965. Vol. 142. P. 531—567.
28. Дорошкевич А. Г., Зельдович Я. Б.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1981. Т. 80(3). С. 801—815.
29. Es'kov A. G., Kurtmullaev R. Kh e. a.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. 1978. IAEA, Vienna, 1979. Vol. 11. P. 187—204.
30. Armstrong W. T., Linford R. K. e. a.//Phys. Fluids, 1981. Vol. 24(11). P. 2068—2089.
31. Кутузов Н. И., Семенов В. И., Стрижов В. Ф.//Физика плазмы. 1981. Т. 7(4). С. 943—952.
32. Green T. S., Newton A. A.//Phys. Fluids. 1966. Vol. 9(7). P. 1386—1388.
33. Кнох С. О., Ментх Н. е. a.//Phys Fluids. 1982. Vol. 25(2). P. 262—268.
34. Armstrong W. T., Harding O. G. e. a.//Phys. Fluids. 1982. Vol. 25(11). P. 2121—2127.
35. Векштейн Г. Е.//Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 1. С. 98—101.
36. Milroy R. D., Slough J. T., Hoffman A. L.//Phys. Fluids. 1984. Vol. 27(6). P. 1545—1551.
37. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля: Пер. с англ. М.: Мир, 1972
38. Богомолов Г. Д., Великович А. Л., Либерман М. А.//Письма в ЖТФ. 1983. Т. 9(12). С. 748—751.  
Liberman M. A., Velikovich A. L.//J. of Plasma Phys. 1984. Vol. 31(3). P. 381—393.
39. Векштейн Г. Е.//Письма в ЖТФ. 1984. Т. 10(12). С. 760—764.
40. Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н. Физика плазмы солнечной атмосферы. М.: Наука, 1977
41. Семенов В. Н., Стрижов В. Ф.//Физика плазмы. 1983. Т. 9(2). С. 401—408.
42. Priest E. R.//Rep. on Progr. in Phys. 1985. Vol. 48, № 7. P. 955—1090.
43. Векштейн Г. Е.//Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 37(2). С. 70—73.
44. Behrich R., Kadomtsev R. R.//Plasma Phys. and Control Nucl. Fus. Res. 1974. IAEA, Vienna. 1975. Vol. 2. P. 229—246.
45. Векштейн Г. Е., Рютов Д. Д., Чеботаев П. З.//Физика плазмы. 1975. Т. 1. Вып. 3 С. 401—406
46. Tange T.//J. Phys. Soc. Japan. 1975. Vol 39(4). P. 1145—1146.
47. Markvoort J. A., Rem I.//Proc. VII Europ. Conf. on Plasma Phys. Lausanne. 1975. Vol 1. P. 131.
48. Vekstein G. E.//Nucl. Fus. 1979. Vol. 19(6). P. 841—845.
49. Jensen R. V., Post D. E. e. a.//Nucl. Fus. 1977. Vol. 17(6), P. 1187—1196.
50. Connor J. W.//Plasma Phys. 1973. Vol. 15(8). P. 765—782.
51. Rutherford P. H.//Phys. Fluids. 1974. Vol. 17(9), P. 1184.
52. Брагинский С. И.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1957. Т. 33(2). С. 459—472.

# КОЛЛЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ

*Б. Н. Брейзман*

---

## ВВЕДЕНИЕ

В конце 60-х — начале 70-х годов в термоядерных исследованиях наметились новые направления, основанные на использовании мощных релятивистских электронных пучков (РЭП) [1—3]. Впечатляющие успехи ускорительной техники позволили вывести традиционные пучково-плазменные эксперименты в недоступную ранее область параметров: появились реальные возможности изучения пучкового нагрева плазмы в условиях, близких к термоядерным. Результаты первых экспериментов с мощными пучками и первоначальные теоретические представления о взаимодействии таких пучков с плазмой (см. обзоры [4, 5] и цитированную там литературу) дали принципиальную надежду на то, что коллективные эффекты, характерные для системы плазма — пучок, позволят сделать эффективность нагрева достаточно высокой, однако для более ясного понимания ситуации требовался дополнительный анализ конкретных механизмов торможения пучка.

С точки зрения теории центральной задачей было описание турбулентности, возбуждаемой пучком вследствие различных микро-неустойчивостей. Время развития таких неустойчивостей обычно мало по сравнению с длительностью инжекции пучка и временем изменения макроскопических свойств плазмы. Поэтому в процессе нагрева в плазме формируется стационарный (или квазистационарный) спектр волн, определяющий длину пробега пучка, энергию, передаваемую плазме, и другие макроскопические характеристики. Теория должна была дать по возможности полную картину взаимодействия волн и частиц и выявить основные тенденции изменения этой картины под влиянием внешних условий. В предлагаемой работе сделана попытка рассказать о сегодняшнем состоянии дел в этой области.

Интерес к плазменно-пучковой турбулентности связан, разумеется, не только с термоядерными приложениями. Решение возникающих здесь вопросов часто помогает лучше понять возможности и внутренние проблемы самой теории. Что же касается приложений, то из них, наряду с термоядерными, уместно упомянуть астрофизические. Следует вместе с тем сказать, что ориентация на обсуждение турбулентности оставляет за рамками обзора ряд других важных проявлений коллективного взаимодействия РЭП с плазмой. В обзоре не представлены, в частности, задачи о взаимодействии

пучка с регулярными волнами, интересные для плазменной СВЧ-электроники, задачи о транспортировке и макроскопической устойчивости пучков, задачи, связанные с коллективным ускорением ионов. Соответствующий материал столь объемен (список работ по мощным РЭП насчитывает более 1500 наименований [6]), что каждый из названных вопросов требует отдельного обсуждения.

## 1. Линейное дисперсионное уравнение. Роль резонансов при возбуждении волн частицами

Описание пучково-плазменных неустойчивостей строится по той же схеме, что и решение общей задачи о линейных колебаниях плазмы. При этом в качестве исходных уравнений используют линеаризованные кинетические уравнения для частиц в самосогласованном электромагнитном поле и уравнения Максвелла. В случае, когда невозмущенное состояние пучка и плазмы стационарно и пространственно однородно, применение метода Фурье сводит задачу к следующей системе уравнений для возмущения электрического поля [7]:

$$(k_\alpha k_\beta c^2 - k^2 c^2 \delta_{\alpha\beta} + \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}) E_\beta(\omega; \mathbf{k}) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь  $\epsilon_{\alpha\beta}(\omega; \mathbf{k})$  — тензор диэлектрической проницаемости среды. Системе (1.1) отвечает дисперсионное уравнение

$$\det(k_\alpha k_\beta c^2 - k^2 c^2 \delta_{\alpha\beta} + \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}) = 0, \quad (1.2)$$

корни которого определяют поведение возмущений во времени.

Если пучок обладает достаточно малой концентрацией и не слишком малым разбросом частиц по скоростям, то возбуждаемые им неустойчивости можно описывать как индуцированное излучение частицами пучка собственных колебаний плазмы. В плазме без магнитного поля излучение обусловлено эффектом Черенкова. При этом частота и волновой вектор излучаемой волны связаны со скоростью частицы соотношением

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0. \quad (1.3)$$

Во внешнем магнитном поле резонанс (1.3) расщепляется и превращается в набор резонансов вида

$$\omega - k_\parallel v_\parallel - n |\omega_H| = 0, \quad (1.4)$$

где целочисленные значения  $n$  нумеруют гармоники циклотронной частоты излучателя. При  $n=0$  резонанс (1.4) благодаря его внешнему сходству с (1.3) принято называть черенковским. Остальные резонансы вида (1.4) называют циклотронными (нормальными при  $n>0$  и аномальными при  $n<0$ ). Их называют также резонансами на нормальном и аномальном эффектах Доплера.

Полезно иметь в виду, что резонансы (1.3) и (1.4) связаны с квантовыми законами сохранения энергии и импульса [8, 9]. Действительно, в элементарном акте излучения волны энергия частицы



изменяется на

$$\Delta \epsilon = \hbar \omega, \quad (1.5)$$

а импульс (в отсутствие внешнего магнитного поля) — на

$$\Delta p = \hbar k. \quad (1.6)$$

Пользуясь тем, что  $\Delta \epsilon$  и  $\Delta p$  малы по сравнению с начальными значениями энергии и импульса, можно заменить величину  $\Delta \epsilon$  произведением  $v \Delta p$ , где  $v = d\epsilon/dp$  — скорость частицы, после чего формулы (1.5) и (1.6) приводят к соотношению (1.3). Аналогичным способом можно получить и соотношение (1.4). При этом обнаруживается, что в случае нормального циклотронного резонанса ( $n > 0$ ) излучение волны сопровождается уменьшением энергии поперечного движения электрона в магнитном поле, а в случае аномального резонанса «поперечная» энергия возрастает. Если же  $n = 0$ , то излучение происходит без изменения поперечной энергии.

Условие, при котором допустимо описание неустойчивости в терминах резонансного взаимодействия частиц с собственными колебаниями плазмы, состоит в том, что неустойчивость должна быть кинетической. Иными словами, разброс частиц пучка по скоростям должен существенно превышать ширину резонанса, определяемую инкрементом неустойчивости  $\Gamma$ . При выполнении этого условия инкремент  $\Gamma$  может быть вычислен по теории возмущений как малая мнимая часть корня дисперсионного уравнения (1.2), связанная с малой антиэрмитовой частью тензора диэлектрической проницаемости. Если обозначить  $\epsilon'_{\alpha\beta}$  эрмитову часть тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$ , а  $\epsilon''_{\alpha\beta}$  — антиэрмитову, то для инкремента получается формула

$$\Gamma = - \left( \epsilon''_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^* \epsilon_{\beta} \right) / \left( \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon'_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^* \epsilon_{\beta} \right) \Big|_{\omega = \omega_k}. \quad (1.7)$$

Здесь  $\omega_k$  и  $e_{\alpha}(k)$  — частота и вектор поляризации волны, определяемые уравнениями (1.1) и (1.2), в которых тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  заменен тензором  $\epsilon'_{\alpha\beta}$ . Обычно  $\epsilon'_{\alpha\beta}$  можно вычислять без учета вклада пучка, что подразумевает малость влияния пучка на закон дисперсии возбуждаемой волны.

Для пучков с очень малым разбросом частиц по скоростям выражение (1.7) непригодно, поскольку такие пучки слишком сильно искажают дисперсионные свойства среды. Неустойчивости, возбуждаемые этими пучками, называют гидродинамическими (в знак того, что движение холодного пучка подчиняется уравнениям гидродинамики). В отличие от кинетического режима, в котором с каждой возбуждаемой волной взаимодействует лишь малая доля частиц пучка, в гидродинамическом режиме в резонансе с неустойчивым возмущением находятся сразу все частицы. Следует, однако, обратить внимание на то, что при малой плотности частиц в пучке ширина резонанса, даже будучи достаточной для захвата большинства частиц, остается все же малой по сравнению с другими характерными параметрами задачи; это дает возможность описать соответствующие неустойчивости аналитически.

Основной интерес в задаче о взаимодействии РЭП с плазмой представляют наиболее быстрые (высокочастотные) неустойчивости пучка, не связанные с движением ионов. Только такие неустойчивости и рассматриваются ниже. Прежде чем перейти к их обсуждению, приведем в справочных целях сводку формул для тензора диэлектрической проницаемости электронной плазмы (ионы считаются неподвижным нейтрализующим фоном). При наличии в плазме магнитного поля выражения для компонент тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  имеют вид [7]:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_{xx} &= 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{n^2 \omega_H^2}{k_{\perp}^2} J_n^2; \\
 \epsilon_{xy} &= -\epsilon_{yx} = i \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \frac{n \omega_H v \sin \theta}{k_{\perp}} J_n J_n'; \\
 \epsilon_{yy} &= 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n v^2 \sin^2 \theta J_n'^2; \\
 \epsilon_{xz} &= \epsilon_{zx} = \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n \frac{n \omega_H v \cos \theta}{k_{\perp}} J_n^2; \\
 \epsilon_{yz} &= -\epsilon_{zy} = -i \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n v^2 \sin \theta \cos \theta J_n J_n'; \\
 \epsilon_{zz} &= 1 + \frac{4\pi e^2}{\omega} \int dp \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n v^2 \cos^2 \theta J_n^2.
 \end{aligned} \right\} (1.8)$$

Здесь  $J_n \equiv J_n(k_{\perp} v \sin \theta / \omega_H)$  и  $J_n' \equiv J_n'(k_{\perp} v \sin \theta / \omega_H)$  — функция Бесселя и ее производная;  $\omega_H$  — циклотронная частота, а величины  $A_n$  и  $B_n$  определяются формулами:

$$\begin{aligned}
 A_n &= (\omega + i0 - k_{\parallel} v \cos \theta - n \omega_H)^{-1} \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\omega \cos \theta - k_{\parallel} v}{\omega p v \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right]; \\
 B_n &= (\omega + i0 - k_{\parallel} v \cos \theta - n \omega_H)^{-1} \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial F}{\partial p} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{p v \sin \theta} \left( \frac{n \omega_H}{\omega \sin \theta} - \sin \theta \right) \frac{\partial F}{\partial \theta} \right].
 \end{aligned}$$

Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  вычислен в системе координат, ось  $z$  которой направлена вдоль силовых линий магнитного поля, а ось  $x$  лежит в плоскости, образованной векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{H}$  ( $k = k_{\perp}; 0; k_{\parallel}$ ). Формула (1.8) относится к релятивистскому случаю; электроны пучка и плазмы характеризуются в ней единой функцией распределения  $F(p; \theta)$ , где  $p$  — импульс частицы, а  $\theta$  — угол между направлениями импульса и магнитного поля.

В случае холодной плазмы и холодного пучка компоненты тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}$  принимают вид [10]:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{(\omega - k_{\parallel} v)^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_{Hb}^2}; \\ \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} &= -i \left[ \frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2} + \right. \\ &+ \left. \frac{n_b}{n\gamma} \frac{(\omega - k_{\parallel} v) \omega_{Hb}}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_{Hb}^2} \right]; \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= -\frac{n_b}{n\gamma} \frac{k_{\perp} v}{\omega} \frac{\omega - k_{\parallel} v}{\omega} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_{Hb}^2}; \\ \epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} &= i \frac{n_b}{n\gamma} \frac{k_{\perp} v}{\omega} \frac{\omega_{Hb}}{\omega} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_{Hb}^2}; \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n\gamma^3} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{k_{\perp}^2 v^2}{\omega^2} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2 - \omega_{Hb}^2}. \end{aligned} \right\} (1.9)$$

Здесь  $\omega_p$  — плазменная частота;  $n$  и  $n_b$  — плотности электронов плазмы и пучка;  $\omega_H$  и  $\omega_{Hb} = \omega_H/\gamma$  — циклотронные частоты этих электронов;  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор; скорость пучка  $v$  считается направленной вдоль магнитного поля.

Если магнитное поле в плазме отсутствует, то

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi e^2}{\omega^2} \int d\mathbf{p} \left( v_{\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_{\beta}} + \frac{v_{\alpha} v_{\beta} k_{\gamma}}{\omega + i0 - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial F}{\partial p_{\gamma}} \right). \quad (1.10)$$

Компоненты этого тензора в случае холодной плазмы и холодного пучка нетрудно получить из формул (1.9), положив  $H=0$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}; \\ \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= 0; \\ \epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} &= -\frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp} v}{\omega - k_{\parallel} v}; \\ \epsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n\gamma^3} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2 v^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2}. \end{aligned}$$

## 2. Пучковая неустойчивость в плазме без магнитного поля (возбуждение ленгмюровских волн)

В электронной плазме без магнитного поля, где существуют всего две ветви собственных колебаний (ленгмюровская и электромагнитная), условие черенковского резонанса с частицами может выполняться только для ленгмюровских волн, поскольку электро-

магнитные волны обладают сверхсветовыми фазовыми скоростями. Дисперсионное уравнение для ленгмюровской волны (с учетом ее потенциальности) имеет вид

$$\varepsilon \equiv \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \varepsilon_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь тензор  $\varepsilon_{\alpha\beta}$  определяется формулой (1.10). Выделив в этом тензоре вклады частиц холодной плазмы и пучка, получим

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \, df/dp}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega - i0} d\mathbf{p} = 0, \quad (2.2)$$

где  $f$  — функция распределения электронов пучка. Для холодного пучка отсюда получается уравнение

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_\parallel v)^2} \left( \frac{k_\parallel^2}{k^2 \gamma^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \right) = 0,$$

из которого следует, что максимум инкремента неустойчивости по продольной составляющей волнового вектора достигается при  $k_\parallel = \omega_p/v$  и равен [11]

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \omega_p \left( \frac{n_b}{n\gamma} \right)^{1/3} \left( \frac{k_\parallel^2}{k^2 \gamma^2} + \frac{k_\perp^2}{k^2} \right)^{1/3} \Big|_{k_\parallel = \omega_p/v}. \quad (2.3)$$

Вследствие анизотропии релятивистской массы этот инкремент представляет собой возрастающую функцию поперечного волнового числа  $k_\perp$ .

Гидродинамическое приближение, в рамках которого получена формула (2.3), подразумевает, что разброс электронов по скоростям удовлетворяет неравенству

$$|\mathbf{k}\Delta\mathbf{v}| \ll \Gamma. \quad (2.4)$$

В нерелятивистском случае это неравенство дает возможность полностью пренебречь влиянием разброса на инкремент  $\Gamma$ . Для релятивистского пучка ситуация иная: благодаря разбросу может изменяться поведение инкремента при малых  $k_\perp$ . Если ширина углового распределения частиц по скоростям  $\Delta\theta$  превышает  $\gamma^{-1}$ , то средняя «продольная» масса частиц уменьшается в  $(\Delta\theta)^2$  раз, в результате чего инкремент для волн, бегущих вдоль пучка, возрастает. При этом формулу (2.3) следует уточнить, заменив величину  $(k_\parallel/k\gamma)^2$  на  $(k_\parallel/k)^2(1/\gamma^2 + \Delta\theta^2)$  (см. задачу 2.1). Разумеется, соотношение  $\Delta\theta > \gamma^{-1}$  не должно противоречить неравенству (2.4). Условие их совместности дает ограничение снизу на энергию пучка:

$$\gamma > (n/n_b)^{1/4}.$$

Еще одна особенность релятивистского случая состоит в том, что справедливость предположения о потенциальности волн здесь заранее не очевидна, так как волны имеют околосветовые фазовые ско-

рости. Анализ общего дисперсионного уравнения (1.2), которое для холодного пучка имеет вид [12]

$$\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n\gamma^3} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 + k_{\perp}^2 v^2 \gamma^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2}\right] - \left(\frac{k_{\parallel} k_{\perp} c^2}{\omega^2} + \frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp} v}{k_{\parallel} v - \omega}\right)^2 = 0, \quad (2.5)$$

показывает, что при малой плотности пучка максимум инкремента действительно отвечает почти потенциальным волнам. Что же касается возмущений с меньшими значениями  $\Gamma$  ( $\Gamma \propto n_b^{1/2}$ ), то среди них имеются существенно непотенциальные. Примером могут служить, скажем, возмущения с  $k_{\parallel} = 0$ , подверженные аperiodической электромагнитной неустойчивости [13] с инкрементом

$$\Gamma = \omega_p \left(\frac{n_b}{n\gamma}\right)^{1/2} \frac{kv}{(\omega_p^2 + k^2 v^2)^{1/2}}.$$

Вернемся теперь к обсуждению неустойчивости ленгмюровских волн и обратимся к кинетическому предельному случаю, который характеризуется неравенством

$$|k\Delta v| \gg \Gamma, \quad (2.6)$$

обратным неравенству (2.4). Выразим прежде всего условие (2.6) через параметры пучка и плазмы. Пусть при  $\gamma \gg 1$  пучок обладает угловым разбросом  $\Delta\theta \ll 1$  и энергетическим разбросом  $\Delta\gamma \ll \gamma$ . Тогда

$$\Delta v_{\perp} = c\Delta\theta; \quad \Delta v_{\parallel} = (c/2)\Delta\theta^2 + (c/\gamma^2)\Delta\gamma/\gamma.$$

Отсюда видно, что при  $\Delta\theta > (1/\gamma)(\Delta\gamma/\gamma)^{1/2}$  разброс частиц по скоростям определяется преимущественно значением  $\Delta\theta$ . Соотношение  $\Delta\theta > (1/\gamma)(\Delta\gamma/\gamma)^{1/2}$  будем в дальнейшем считать выполненным. Во многих случаях выполняется даже более сильное неравенство

$$\Delta\theta > \gamma^{-1}. \quad (2.7)$$

Подставив величины  $\Delta v_{\perp}$ ,  $\Delta v_{\parallel}$  и  $\Gamma$  в неравенство (2.6), получим соотношение

$$\begin{aligned} & k_{\parallel} c \frac{\Delta\theta^2}{2} + k_{\perp} c \Delta\theta > \\ & > \omega_p \left(\frac{n_b}{n\gamma}\right)^{1/2} \left[ \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \Delta\theta^2\right) + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где  $k_{\parallel} = \omega_p/c$ . Присутствие в этой формуле величины  $k_{\perp}$  приводит к тому, что при малых значениях  $\Delta\theta$  возможна ситуация, когда для одних волн неустойчивость является гидродинамической, а для других — кинетической. С увеличением разброса неустойчивость в конце концов становится кинетической для всех волн. Условие полного

перехода в кинетический режим дает следующее ограничение на  $\Delta\theta$ :

$$\Delta\theta \geq \begin{cases} \left(\frac{n_b}{n\gamma^3}\right)^{1/4}; & \gamma \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/4} \leq 1; \\ \left(\frac{n_b}{n\gamma}\right)^{1/4}; & \gamma \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/4} \geq 1. \end{cases} \quad (2.9)$$

Кинетический инкремент пропорционален мнимой части интеграла (2.2), связанной с полюсом подынтегральной функции, и имеет вид

$$\Gamma = \omega_p \frac{2\pi^2 e^2}{k^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial p} \delta(\omega_p - \mathbf{k}\mathbf{v}) dp. \quad (2.10)$$

Если наряду с неравенством (2.9) имеет место также соотношение (2.7), то в формуле (2.10) можно пренебречь зависимостью модуля скорости электрона от импульса и положить в аргументе  $\delta$ -функции  $|\mathbf{v}| = c$ . Для вычисления интеграла (2.10) удобно ввести сферические координаты  $p, \theta, \varphi$  в пространстве импульсов и  $k, \theta', \varphi'$  в пространстве волновых векторов (углы  $\theta$  и  $\theta'$  отсчитываются от направления инжекции пучка). Предположив, что функция распределения аксиально-симметрична, и выполнив интегрирование по  $\varphi$ , можно представить [14, 15] инкремент (2.10) в виде

$$\Gamma = \pi\omega_p \frac{n_b}{n} \left(\frac{\omega_p}{kc}\right)^3 \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta [(\cos\theta_1 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_2)]^{-1/4} \times \\ \times \left[ -2g \sin\theta + \left(\cos\theta - \frac{kc}{\omega_p} \cos\theta'\right) \frac{\partial g}{\partial \theta} \right]; \quad (2.11)$$

$$\text{где } g = \frac{mc}{n_b} \int_0^{\infty} p f(p; \theta) dp; \quad \cos\theta_{1,2} = \\ = (\omega_p/kc) \left( \cos\theta' \pm \sin\theta' \sqrt{k^2 c^2 / \omega_p^2 - 1} \right).$$

В дополнение к этой формуле приведем два ее предельных случая. Если  $\theta' = 0$ , то

$$\Gamma = \pi^2 \omega_p \frac{n_b}{n} \left(\frac{\omega_p}{kc}\right)^2 \left( \frac{\partial}{\partial \cos\theta} g \sin^2 \theta \right) \Big|_{\cos\theta = \omega_p/(kc)}. \quad (2.12)$$

Если же  $\theta' \gg \Delta\theta$  и  $\Delta\theta \ll 1$ , то

$$\Gamma = \pi\omega_p \frac{n_b}{n} \left(\frac{\omega_p}{kc}\right)^2 \delta \int_{\theta_1}^{\infty} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta^2 - \delta^2}} \frac{\partial g}{\partial \theta}, \quad (2.13)$$

где  $\delta = (\omega_p/kc - \cos\theta') / \sqrt{1 - \omega_p^2/(k^2 c^2)}$ .

Кинетический инкремент (2.11) существенно отличен от нуля только в той области пространства волновых векторов, где условие черенковского резонанса выполнено для значительной части элек-

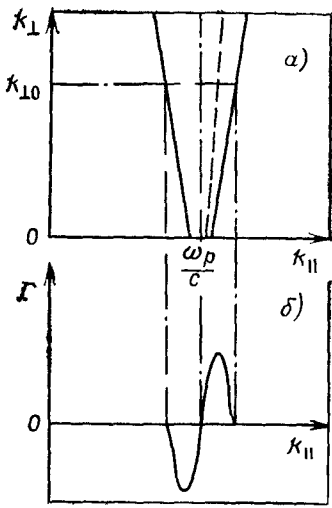


Рис. 1. Резонансная область (а) (границы области образуют угол  $\sim \Delta\theta$  с вертикалью); штрихами показана линия максимума инкремента) и зависимость инкремента пучковой неустойчивости от продольной составляющей волнового вектора (б) при фиксированном значении  $k_{\perp}$ , обозначенном  $k_{\perp 0}$

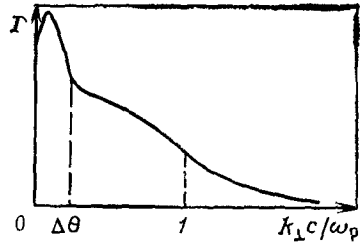


Рис. 2. Зависимость инкремента пучковой неустойчивости, максимизированного по  $k_{\parallel}$ , от поперечной составляющей волнового вектора

тронов пучка. Эта резонансная область схематически изображена на рис. 1, а. Из условия (1.3) следует, что при  $\Delta\theta > \gamma^{-1}$  форма резонансной области задается соотношениями:

$$-k_{\perp}\Delta\theta - \frac{\omega_p}{c} \frac{\Delta\theta^2}{2} \leq \frac{\omega_p}{c} - k_{\parallel} \leq \begin{cases} k_{\perp}c/2\omega_p, & k_{\perp}c \leq \Delta\theta\omega_p; \\ k_{\perp}\Delta\theta - \frac{\omega_p}{2c} \Delta\theta^2, & k_{\perp}c \geq \Delta\theta\omega_p. \end{cases}$$

Формула (2.13) показывает, что для пучка с монотонной функцией распределения  $g(\theta)$  инкремент положителен в правой половине резонансной области и отрицателен в левой. При фиксированном значении  $k_{\perp}$  зависимость  $\Gamma$  от  $k_{\parallel}$  имеет вид, изображенный на рис. 1, б. Положение точки максимума инкремента  $\bar{k}_{\parallel}$  зависит от  $k_{\perp}$ :  $\bar{k}_{\parallel} = \bar{k}_{\parallel}(k_{\perp})$ . Точки максимума инкремента по  $k_{\parallel}$  образуют линию, показанную на рис. 1, а пунктиром. Зависимость инкремента на этой линии от  $k_{\perp}$  изображена на рис. 2. Вне узкой области малых значений  $k_{\perp}$  ( $k_{\perp} \sim \Delta\theta\omega_p/c$ ) максимизированный инкремент  $\Gamma(k_{\perp})$  убывает с увеличением  $k_{\perp}$  по следующему закону:

$$\bar{\Gamma} = \alpha\omega_p \frac{n_b}{n} \frac{mc}{p_0} \frac{1}{\Delta\theta^2} \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 + k_{\perp}^2 c^2}. \quad (2.14)$$

Здесь  $p_0$  и  $\Delta\theta$  — средние значения импульса и углового разброса частиц пучка;  $\alpha$  — численный коэффициент порядка единицы, зависящий от вида функции распределения\*. В качестве оценки фор-

\* В частности, для  $g(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{mc}{p_0} \frac{1}{\Delta\theta^2} \exp[-(\theta/\Delta\theta)^2]$  коэффициент  $\alpha$  равен

мула (2.14) применима при всех значениях  $k_{\perp}$  (в том числе и малых).

Несколько по-иному выглядит кинетический инкремент в том случае, когда условие (2.7) не выполнено. Такая ситуация возможна только при  $(n_b/n)^{1/3} < \gamma^{-1}$ , поскольку при  $(n_b/n)^{1/3} > \gamma^{-1}$  из неравенства (2.9) автоматически следует, что  $\Delta\theta > \gamma^{-1}$ . Вычисления показывают, что при  $\Delta\theta < \gamma^{-1}$  кинетический инкремент также максимален для волн, бегущих почти вдоль пучка ( $k_{\perp} \leq \Delta\theta\omega_p/c$ ), но оценка его значения в максимуме меняется (см. задачу 2.2):

$$\Gamma \sim \omega_p \frac{n_b}{n} \frac{1}{\gamma^3 \Delta\theta^4}; \quad k_{\perp} \sim \Delta\theta\omega_p/c. \quad (2.15)$$

С увеличением  $k_{\perp}$  инкремент сначала быстро убывает:

$$\Gamma \sim \omega_p \frac{n_b}{n} \frac{1}{\gamma^3 \Delta\theta^2} \frac{\omega_p^2}{k_{\perp}^2 c^2}; \quad \Delta\theta \leq \frac{k_{\perp} c}{\omega_p} \leq \gamma^{-1},$$

а при  $k_{\perp} c/\omega_p \geq \gamma^{-1}$  выходит на асимптотику, определяемую формулой (2.14). Таким образом, при  $\Delta\theta < \gamma^{-1}$  максимум кинетического инкремента существенно обостряется и в  $(\gamma\Delta\theta)^{-2}$  раз превосходит значения инкремента в области  $k_{\perp} \sim \omega_p/c$ .

Рассматривая поочередно гидродинамический и кинетический режимы неустойчивости, мы уже упоминали о том, что для пучков, не удовлетворяющих условию (2.9), эти режимы могут переходить друг в друга при изменении волнового вектора возбуждаемой волны. Поведение инкремента в такой промежуточной ситуации проанализировано в [16] (см. также [17]). Инкремент в данном случае имеет минимум при малых значениях  $k_{\perp}$ , где неустойчивость гидродинамическая, и растет с увеличением  $k_{\perp}$  до тех пор, пока не становится существенным учет разброса пучка. Если  $\Delta\theta \ll (n_b/n\gamma)^{1/3}$ , то инкремент достигает значения  $\Gamma_{\max} \sim \omega_p (n_b/n\gamma)^{1/3}$  и остается близким к нему в широком диапазоне изменения  $k_{\perp}$  ( $1 \ll k_{\perp} c/\omega_p \ll (1/\Delta\theta) (n_b/n\gamma)^{1/3}$ ), а при  $k_{\perp} c/\omega_p \geq (1/\Delta\theta) (n_b/n\gamma)^{1/3}$  (после перехода неустойчивости в кинетический режим) начинает убывать пропорционально  $1/k_{\perp}^2$ . Если же  $\Delta\theta > (n_b/n\gamma)^{1/3}$ , то широкое плато на графике зависимости инкремента от  $k_{\perp}$  отсутствует; максимум инкремента при этом достигается на стыке гидродинамического и кинетического приближений. По мере увеличения  $\Delta\theta$  максимум смещается в область малых значений  $k_{\perp}$  и к моменту, когда неустойчивость станет кинетической во всем диапазоне  $k_{\perp}$ , ее инкремент окажется максимальным для волн с  $k_{\perp} \leq \Delta\theta\omega_p/c$ .

**Задача 2.1.** Найти гидродинамический инкремент возбуждения ленгмюровских волн ультрарелятивистским пучком с конечным угловым разбросом.

**Решение.** Выполним в дисперсионном уравнении (2.2) интегрирование по частям:

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{4\pi e^2}{k^2} \int \frac{f}{\gamma(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2} \left[ k^2 - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^2}{c^2} \right] d\mathbf{p} = 0.$$



Неравенство (2.4) позволяет заменить в знаменателе подынтегрального выражения величину  $v$  средней скоростью частиц, после чего интеграл легко вычисляется. Считая пучок моноэнергетическим и переходя к сферическим координатам, получаем

$$1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} - \frac{n_b}{n\gamma} \frac{\omega_p^2}{(\omega - k_{\parallel} v)^2} \left[ \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \left( \frac{1}{\gamma^2} + \bar{\theta}^2 \right) + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right],$$

где черта означает усреднение по функции распределения. С учетом малости величин  $\gamma^{-1}$  и  $\theta$  здесь оставлены только старшие члены разложения. Решение этого уравнения дает следующую формулу для максимизированного по  $k_{\parallel}$  инкремента:

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3} \omega_p}{2^{4/3}} \left( \frac{n_b}{n\gamma} \right)^{1/3} \left[ \left( \frac{k_{\parallel}^*}{k} \right)^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} + \bar{\theta}^2 \right) + \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \right]^{1/3} \Big|_{k_{\parallel} = \omega_p/v}$$

[см. для сравнения (2.3)].

**Задача 2.2.** Получить оценку (2.15).

Решение. Положим в формуле (2.10)  $f = \frac{n_b}{2\pi} \frac{\delta(p - p_0)}{p_0^2} G(\theta)$  и перейдем к сферическим координатам  $p, \theta, \varphi$  и вычислим интеграл при  $k_{\perp} = 0, k_{\parallel} = k$ :

$$\Gamma = -\frac{\pi}{2} \omega_p \frac{n_b}{n} \frac{mc}{(p_0^2 + m^2 c^2)^{1/2}} \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ G(\theta) \left( \sin^2 \theta + \frac{m^2 c^2 \cos^2 \theta}{p_0^2 + m^2 c^2} \right) \right].$$

Здесь  $\cos \theta = (\omega_p/kc) \sqrt{1 + m^2 c^2/p_0^2}$ .

Для функции  $G$  и ее производной можно написать оценки:  $G \sim 1/(\Delta\theta)^2$ ;  $G' \sim -1/(\Delta\theta)^3$ . В результате для  $\Gamma$  при  $\Delta\theta \ll 1/\gamma$  получается оценка (2.15), а при  $\Delta\theta \gg 1/\gamma$  — оценка, согласующаяся с формулой (2.14).

### 3. Гидродинамические неустойчивости пучка в магнитоактивной плазме

Вклад холодного пучка в тензор диэлектрической проницаемости (1.9) содержит резонансы (1.4) с тремя значениями  $n$  ( $n = -1; 0; 1$ ). Из них «неустойчивыми» могут быть только два резонанса ( $n = -1$  и  $n = 0$ ). Третий резонанс исключается по той причине, что поперечная энергия электронов пучка, будучи равной нулю, не может уменьшаться в процессе излучения волны. Отсюда возникает, в частности, запрет на раскачку всех волн со сверхсветовыми фазовыми скоростями [при  $n \leq 0$  и  $\omega > |k|c$  не выполняется соотношение (1.4)].

Подстановка тензора (1.9) в дисперсионное соотношение (1.2) дает алгебраическое уравнение двенадцатой степени относительно  $\omega$ , которое в общем случае приходится решать численно [18]). Если, однако, плотность пучка мала, то инкременты возбуждаемых пучком неустойчивостей можно найти аналитически. Представим для этого тензор (1.9) в виде суммы  $\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^p + \epsilon_{\alpha\beta}^b$ , где  $\epsilon_{\alpha\beta}^p$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы, а  $\epsilon_{\alpha\beta}^b$  — добавка, про-

порциональная плотности пучка, и рассмотрим волну с частотой  $\omega$ , близкой к одной из собственных частот плазмы  $\omega_k$ . Малость величины  $\omega - \omega_k$  позволяет заменить тензор  $\omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p$  в уравнении (1.1) его разложением в ряд по  $\omega$  и переписать уравнение (1.1) в виде

$$[k_\alpha k_\beta c^2 - k^2 c^2 \delta_{\alpha\beta} + \omega_k^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p(\omega_k; \mathbf{k})] E_\beta(\omega; \mathbf{k}) + (\omega - \omega_k) \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p \right) \Big|_{\omega=\omega_k} E_\beta(\omega; \mathbf{k}) + \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}^b E_\beta(\omega; \mathbf{k}) = 0.$$

Умножим далее обе части полученного уравнения на вектор  $e_{\alpha^*}(\mathbf{k})$ , сопряженный вектору поляризации волны с частотой  $\omega_k$ . При этом вследствие эрмитовости тензора  $\epsilon_{\alpha\beta}^p(\omega_k; \mathbf{k})$  первое слагаемое в левой части обращается в нуль. В остальных двух слагаемых, учитывая их малость, можно заменить  $E_\beta(\omega; \mathbf{k})$  вектором  $e_\beta(\mathbf{k})$ , что приводит к следующему уравнению:

$$(\omega - \omega_k) e_{\alpha^*} e_\beta \left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p \right) \Big|_{\omega=\omega_k} + \omega^2 e_{\alpha^*} e_\beta \epsilon_{\alpha\beta}^b(\omega; \mathbf{k}) = 0. \quad (3.1)$$

В случае черенковского возбуждения волны в тензоре  $\epsilon_{\alpha\beta}^b$  достаточно оставить одну только компоненту  $\epsilon_{zz}$ . Тогда уравнение (3.1) приобретает вид

$$(\omega - \omega_k) (\omega - k_{\parallel} v)^2 = \frac{n_b}{n\gamma^3} \frac{\omega_p^2 |e_z|^2}{\left( \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p e_{\alpha^*} e_\beta \right) \Big|_{\omega=\omega_k}}. \quad (3.2)$$

Максимальный инкремент неустойчивости в этом случае пропорционален  $(n_b/n)^{1/3}$ . Выделение в тензоре  $\epsilon_{\alpha\beta}^b$  резонансных членов, отвечающих циклотронному возбуждению волн, дает для  $\omega$  вместо кубического уравнения (3.2) квадратное уравнение

$$\begin{aligned} & (\omega - \omega_k) (\omega - k_{\parallel} v + |\omega_{Hb}|) = \\ & = - \frac{n_b}{2n\gamma} \frac{\omega_p^2 |\omega_{Hb}| \left| e_x + i e_y + \frac{k_{\perp} v}{\omega_{Hb}} e_z \right|^2}{\left( \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta}^p e_{\alpha^*} e_\beta \right) \Big|_{\omega=\omega_k}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

из которого, в частности, видно, что циклотронный инкремент пропорционален  $(n_b/n)^{1/2}$ . Ограничение в формулах (3.2), (3.3) частотами, близкими к собственным частотам плазмы, разумеется, несколько сузило класс рассматриваемых неустойчивостей. Это, впрочем, не очень существенно, поскольку все наиболее быстрые неустойчивости (а именно они представляют первоочередной интерес) действительно связаны с возбуждением тех или иных собственных колебаний плазмы. Остальные неустойчивости при малой концентрации пучка также поддаются аналитическому исследова-

нию, но, чтобы не загромождать изложение деталями, откажемся здесь от их обсуждения.

Рассмотрим теперь особенности раскочки пучком различных собственных колебаний плазмы, ограничившись для простоты предельными случаями слабого ( $|\omega_H| \ll \omega_p$ ) и сильного ( $|\omega_H| \gg \omega_p$ ) внешнего магнитного поля. В первом случае неустойчивыми оказываются ленгмюровские волны и геликоны; во втором — замагниченные электронные колебания в диапазоне плазменной частоты и медленные необыкновенные волны.

**3.1. Возбуждение ленгмюровских волн.** Вычисляя инкремент раскочки ленгмюровских волн, можно полностью пренебречь влиянием внешнего магнитного поля на движение электронов плазмы (но не электронов пучка!), т. е. положить в формулах (3.2) и (3.3)  $\omega_k = \omega_p$ ,  $\varepsilon_{\alpha\beta} = (1 - \omega_p^2/\omega^2)\delta_{\alpha\beta}$  и  $e_\alpha = k_\alpha/k$ . В случае черенковской раскочки [см. (3.2)] максимум инкремента по продольной составляющей волнового вектора достигается при  $k_{\parallel} = \omega_p/v$  и равен

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{k_{\parallel}^2}{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}\right)^{1/3}. \quad (3.4)$$

При этом быстрее всего нарастают волны с малыми значениями  $k_{\perp}$ .

Для неустойчивости, обусловленной циклотронным резонансом [см. (3.3)],

$$\Gamma = \frac{\omega_p}{2} \frac{k_{\perp}}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/3} \left(\frac{\omega_p}{|\omega_H|}\right)^{1/3}, \quad (3.5)$$

где  $k_{\parallel} = (\omega_p + |\omega_{Hb}|)/v$ . Этот инкремент, в отличие от черенковского, растет с увеличением  $k_{\perp}$ .

Формулы (3.4) и (3.5) справедливы лишь в том случае, когда вычисленные с их помощью инкременты достаточно малы ( $\Gamma \ll |\omega_{Hb}|$ ). Если же  $\Gamma \gg |\omega_{Hb}|$ , то циклотронный и черенковский резонансы перекрываются (расстояние между ними оказывается меньше характерной ширины резонанса). Такое слияние резонансов соответствует переходу к рассмотренному в § 2 случаю нулевого магнитного поля.

Уточним теперь закон дисперсии возбуждаемых пучком волн, т. е. найдем «магнитную» добавку к плазменной частоте  $\omega_p$ . Это нетрудно сделать с помощью уравнения (1.2), разложив в нем компоненты тензора  $\varepsilon_{\alpha\beta}^p$  в ряд по малому параметру  $\omega_H/\omega$ . Искомая дисперсионная добавка имеет вид

$$\omega_k - \omega_p = \frac{1}{2} \omega_p \left(\frac{\omega_H}{\omega_p}\right)^2 \frac{k_{\perp}^2}{k^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2}\right). \quad (3.6)$$

Подчеркнем, что вычисление этой добавки требует учета непотенциальности волны; электростатическое приближение в данном случае недостаточно.

**3.2. Возбуждение геликонов.** Геликоны представляют собой электронные колебания, относящиеся к быстрой магнитозвуковой ветви. В плотной плазме  $\omega_p \gg |\omega_H|$  они обладают следующим законом дисперсии и вектором поляризации (см., например, [19], с. 199):

$$\omega_k = |\omega_H| \frac{|k_{\parallel}| kc^2}{k^2 c^2 + \omega_p^2}; \quad (3.7)$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 + k_{\perp}^2 c^2 / \omega_p^2 \\ i |k_{\parallel}| / k \\ k_{\parallel} k_{\perp} c^2 / \omega_p^2 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Фазовая скорость геликонов мала по сравнению со скоростью света. Поэтому черенковское взаимодействие этих волн с релятивистским пучком невозможно, и остается только циклотронный резонанс

$$\omega_k - k_{\parallel} v + |\omega_{Hb}| = 0. \quad (3.9)$$

Из условия (3.9) и соотношения  $\omega_k \ll |k_{\parallel}| c$  следует, что продольная составляющая волнового вектора возбуждаемой волны должна быть близка к  $|\omega_{Hb}|/v$ , а частота волны мала по сравнению с  $|\omega_{Hb}|$ . С учетом этого обстоятельства уравнение (3.3) дает для инкремента неустойчивости следующее выражение [20]:

$$\Gamma = \frac{|\omega_{Hb}|}{2} \left(\frac{n_b}{n}\right)^{1/2} \frac{\omega_p^2}{k^2 c^2 + \omega_p^2} \left[ \frac{(|k_{\parallel}| - k)^2}{|k_{\parallel}| k} \right]^{1/2}, \quad (3.10)$$

где  $k_{\parallel} = |\omega_{Hb}|/v$ .

Инкремент (3.10) имеет максимум при  $k = \omega_p / c \sqrt{3} \gg k_{\parallel}$ . Его максимальное значение равно

$$\Gamma_{\max} = (3^{3/4}/8) (|\omega_{Hb}| |\omega_p|)^{1/2} (n_b v / nc)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Область применимости формул (3.10), (3.11) определяется неравенством  $\Gamma \ll \omega_k$ , которое приводит к следующему ограничению на концентрацию пучка:

$$n_b/n \ll (1/\gamma) (|\omega_H|/\omega_p)^3.$$

Возможность раскачки геликонов сохраняется и при более высоких значениях  $n_b$ , однако неустойчивость в этом случае несколько модифицируется, поскольку пучок начинает существенно искажать закон дисперсии волн. Проиллюстрируем это на простом примере, приведенном в [5]. Будем считать, что в равновесном состоянии ток пучка полностью скомпенсирован обратным током электронов плазмы, и рассмотрим возмущения, для которых  $|\omega| \ll |k_{\parallel}| v$ , причем величина  $k_{\parallel} v$  мала по сравнению с циклотронной частотой релятивистских электронов. Тогда для поперечных компонент тензо-

ра диэлектрической проницаемости (1.9) можно написать следующие приближенные выражения:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = (k_{\parallel} c / \omega)^2 \beta_b; \quad \epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = i \omega_p^2 / (\omega \omega_H),$$

где  $\beta_b \equiv 4\pi n_b m v^2 \gamma / H^2$ .

Подставляя эти компоненты в уравнение (1.2) и учитывая, что продольная проводимость плазмы намного выше поперечной, получаем

$$\omega^2 = \omega_H^2 (k_{\parallel}^4 c^4 / \omega_p^4) (\beta_b - 1) (\beta_b - 1 - k_{\perp}^2 / k_{\parallel}^2). \quad (3.12)$$

В отсутствие пучка ( $\beta_b = 0$ ) формула (3.12) дает закон дисперсии геликонов, а при  $\beta_b > 1$  она описывает аperiodическую неустойчивость, не связанную с циклотронным резонансом. Эта неустойчивость может, в частности, неблагоприятно сказываться на транспортировке мощных пучков. Для ее подавления требуется, как видно, достаточно сильное ведущее магнитное поле.

**3.3. Возбуждение замагниченных электронных колебаний при  $|\omega_H| \gg \omega_p$ .** Рассматриваемые колебания лежат в диапазоне плазменной частоты  $\omega_p$ . При  $|\omega_H| \gg \omega_p$  движение электронов плазмы в этих колебаниях близко к одномерному. В пренебрежении поперечным смещением электронов и вкладом пучка в тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  дисперсионное уравнение (1.2) принимает следующий вид:

$$\omega^4 - \omega^2 (k^2 c^2 + \omega_p^2) + k_{\parallel}^2 c^2 \omega_p^2 = 0. \quad (3.13)$$

Из двух корней уравнения (3.13) необходимо выбрать меньший:

$$\omega_k^2 = \frac{\omega_p^2 + k^2 c^2}{2} - \left[ \left( \frac{\omega_p^2 + k^2 c^2}{2} \right)^2 - k_{\parallel}^2 c^2 \omega_p^2 \right]^{1/2}, \quad (3.14)$$

так как второй корень отвечает волне со сверхсветовой фазовой скоростью, не взаимодействующей с «холодным» пучком. Вектор поляризации волны (3.14) равен

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} k_{\parallel} k_{\perp} c^2 \\ 0 \\ k_{\parallel}^2 c^2 - \omega_k^2 \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Условие черенковского резонанса между волной (3.14) и электронами пучка выделяет в пространстве волновых векторов эллипсоид вращения

$$k_{\parallel}^2 v^2 / \omega_p^2 + \gamma^2 k_{\perp}^2 v^2 / \omega_p^2 = 1.$$

Обратившись к уравнению (3.2), нетрудно показать, что максимум черенковского инкремента отвечает волне, у которой  $k_{\perp} = 0$ , а  $\omega_k = \omega_p$ . При этом

$$\Gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \frac{1}{\gamma} \left( \frac{n_b}{n} \right)^{1/3}. \quad (3.16)$$

Волна (3.14) с нулевым значением  $k_{\perp}$  потенциальна. Если же поперечная компонента волнового вектора отлична от нуля, то в волне обязательно присутствует и непотенциальная составляющая. Поэтому для косых волн вычисление инкремента в рамках часто используемого электростатического приближения (см., например, [21]) чревато ошибками. Если в нерелятивистском пределе электростатический подход вполне оправдан, то в релятивистском случае ( $\gamma \gg 1$ ) он дает для инкремента сильно завышенный результат.

Рассмотрим теперь циклотронное возбуждение волны (3.14). Чтобы упростить вычисление соответствующего инкремента, предположим, что наряду с неравенством  $|\omega_H| \gg \omega_p$  выполняется несколько более жесткое ограничение  $|\omega_{Hb}| \gg \omega_p$ . Это дает возможность считать возбуждаемую волну потенциальной. Действительно, при  $|\omega_{Hb}| \gg \omega_p$  из условия циклотронного резонанса (3.9) и того факта, что частота волны (3.14) меньше плазменной частоты, следует соотношение

$$k_{\parallel} \approx \omega_{Hb} / v \gg \omega_k / c,$$

позволяющее пренебречь в формуле (3.15) величиной  $\omega_k^2$ , после чего векторы  $e$  и  $k$  становятся коллинеарными. С учетом потенциальности волны уравнение (3.3) дает для искомого инкремента следующее выражение:

$$\Gamma = \frac{\omega_p}{2} \left( \frac{n_b}{n} \right)^{1/2} \left( \frac{\omega_p}{|\omega_H|} \right)^{1/2} \frac{k_{\perp}}{k} \left( \frac{k_{\parallel}}{k} \right)^{1/2}, \quad (3.17)$$

где  $k_{\parallel} \approx |\omega_{Hb}| / v$ . Максимум этого инкремента достигается при  $k_{\perp} = \sqrt{2} k_{\parallel}$ ; он соответствует волне с частотой  $\omega_p / \sqrt{3}$ .

**3.4. Возбуждение медленных необыкновенных волн.** Медленная необыкновенная волна в электронной плазме характеризуется следующей зависимостью показателя преломления  $N$  от частоты  $\omega$  и угла  $\theta$  между направлениями волнового вектора и магнитного поля [7]:

$$N^2 = \frac{(\epsilon^2 - g^2 - \epsilon\eta) \sin^2 \theta + 2\epsilon\eta + [(\epsilon^2 - g^2 - \epsilon\eta)^2 \sin^4 \theta + 4\eta^2 g^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}{2(\epsilon \sin^2 \theta + \eta \cos^2 \theta)}. \quad (3.18)$$

Здесь использованы обозначения, принятые в [7]:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad g = -\frac{\omega_H}{\omega} \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_H^2}; \quad \eta = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Для возбуждения волны холодным пучком необходимо, чтобы ее показатель преломления был больше единицы. Соответствующий диапазон частот определяется неравенствами:

$$\omega_p^2 < \omega^2 < \frac{\omega_H^2 + \omega_p^2}{2} + \left[ \left( \frac{\omega_H^2 - \omega_p^2}{2} \right)^2 + \omega_p^2 \omega_H^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}. \quad (3.19)$$

Будучи необходимым, соотношение (3.19) вместе с тем еще не является достаточным для выполнения условий черенковского и циклотронного резонансов. Чтобы получить добавочное ограничение на частоту волны, найдем предварительно с помощью формулы (3.18) максимум величины  $N^2$  по  $\theta$  при заданном значении  $\omega$ . Нетрудно показать, что если  $\omega$  лежит в интервале  $\omega_p^2 < \omega^2 < \omega_H^2$ , то искомым максимумом отвечает волне, бегущей вдоль магнитного поля ( $\theta=0$ ), т. е.

$$N_{\max}^2 = \varepsilon + |g| = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega - |\omega_H|)}.$$

Чтобы мог реализоваться черенковский резонанс, значение  $N_{\max}^2$  должно, очевидно, быть больше, чем  $c^2/v^2$ ; это требование приводит к неравенству

$$\omega^2 - \omega |\omega_H| + \omega_p^2 v^2 / (c^2 - v^2) > 0. \quad (3.20)$$

Для циклотронного резонанса соответствующее ограничение получается из сравнения величин  $N_{\max}^2$  и  $N^2 = (c^2/v^2)(1 + |\omega_H b/\omega|)^2$ .

Полное описание возбуждения медленной необыкновенной волны довольно громоздко. Поэтому ограничимся предельным случаем сильного магнитного поля ( $|\omega_H| \gg \omega_p$ ) и не слишком высокой энергии пучка  $c^2/v^2 - 1 \gg |\omega_p/\omega_H|$ . Из неравенств (3.19) и (3.20) следует, что в этом случае частота волны, возбуждаемой за счет черенковского резонанса, близка к циклотронной частоте  $\omega_H$ . Последнее в равной мере относится и к циклотронному резонансу. Близость  $\omega$  к  $|\omega_H|$  позволяет решить дисперсионное уравнение (3.18) и получить простые приближенные выражения для частоты и вектора поляризации волны:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= |\omega_H| \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_H^2} \frac{2 - k_{\perp}^2 c^2 / \omega_H^2}{1 - k_{\perp}^2 c^2 / \omega_H^2} \right); \\ \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} &\propto \begin{pmatrix} k_{\perp}^2 c^2 / \omega_H^2 - 1 \\ -i \\ k_{\parallel} k_{\perp} c^2 / \omega_H^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Используя теперь уравнения (3.2) и (3.3), находим, что для черенковского резонанса

$$\Gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \frac{\omega_p}{\gamma} \left( \frac{n_b}{n} \right)^{1/3} \left( \frac{\omega_p}{|\omega_H|} \right)^{1/3} \left[ \frac{c^2}{v^2} \frac{\omega_H^2 k_{\perp}^2 c^2}{\left( k_{\perp}^2 c^2 + \omega_H^2 \frac{c^2}{v^2 \gamma^2} \right)^2} \right]^{1/3}, \quad (3.22)$$

а для циклотронного

$$\Gamma = \frac{\omega_p}{2} \left( \frac{n_b}{n} \right)^{1/3} \frac{\omega_p}{|\omega_H|} \frac{k_{\perp}^2 c^2}{k_{\perp}^2 c^2 + \omega_H^2 [(c^2/v^2)(1 + 1/\gamma^2) - 1]}. \quad (3.23)$$

Здесь учтено, что в случае черенковского резонанса  $k_{\parallel} \approx |\omega_H|/v$ , а при циклотронном резонансе  $k_{\parallel} \approx (|\omega_H|/v)(1+1/\gamma)$ . Сравнение формул (3.22), (3.23) с формулами (3.16), (3.17) показывает, что в сильном магнитном поле эффективность возбуждения медленных необыкновенных волн довольно низка (замагниченные электронные колебания обладают существенно большими инкрементами).

#### 4. Кинетические неустойчивости пучка в магнитоактивной плазме

4.1. Возбуждение ленгмюровских волн при  $\omega_H \ll \omega_p$ . Рассмотрим неустойчивости пучка с конечным разбросом частиц по скоростям в предположении, что разброс достаточен для выполнения условия применимости кинетического описания

$$|k_{\parallel} \Delta v_{\parallel}| + |n\omega_{Hb} \Delta \gamma / \gamma| \gg \Gamma,$$

позволяющего вычислять инкремент неустойчивости по формуле (1.7), в которой антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости определяется резонансами (1.4). Выделив в тензоре (1.8) вклад, связанный с обходом полюсов подынтегральных функций, можно представить инкремент (1.7) в виде

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{4\pi^2 e^2 \omega_k}{\frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha}^* \epsilon_{\beta}} \Big|_{\omega=\omega_k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dp \delta(\omega_k - n\omega_{Hb} - k_{\parallel} v \cos \theta) \times \\ & \times \left| \left( \frac{n\omega_{Hb}}{k_{\perp}} e_x + e_z v \cos \theta \right) J_n + i e_y v \sin \theta J_n^* \right|^2 \times \\ & \times \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial p} + \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{n\omega_{Hb}}{\omega_k} - \sin \theta \right) \frac{1}{pv \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right], \end{aligned} \quad (4.1)$$

где  $f$  — функция распределения электронов пучка. Используя это выражение для инкремента, выясним здесь, как влияет разброс частиц на неустойчивости, перечисленные в § 3.

Малость циклотронной частоты по сравнению с плазменной дает возможность пренебречь в формуле (4.1) непотенциальностью ленгмюровской волны и дисперсионной добавкой к ее частоте. В результате такого упрощения инкремент (4.1) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \frac{2\pi^2 e^2 \omega_p^2}{k^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dp \delta(\omega_p - k_{\parallel} v \cos \theta - n\omega_{Hb}) \times \\ & \times J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v \sin \theta}{\omega_{Hb}} \right) \left( \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\omega_p \cos \theta - k_{\parallel} v}{\omega_p p v \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Анализируя эту формулу, удобно различать два предельных случая:  $|k_{\parallel} \Delta v_{\parallel}| \gg |\omega_{Hb}|$  и  $|k_{\parallel} \Delta v_{\parallel}| \ll |\omega_{Hb}|$ . Первый из них соответ-



вует сильному перекрытию циклотронных резонансов, когда для каждой волны необходим учет большого числа слагаемых с различными значениями  $n$ . Во втором случае резонансы изолированы друг от друга, т. е. задание продольной составляющей волнового вектора однозначно определяет номер резонанса.

Рассмотрим сначала случай перекрывающихся резонансов и покажем, что в этом случае влияние магнитного поля на инкремент пренебрежимо мало, т. е. выражение (4.2) переходит в (2.10). Для доказательства введем вспомогательную функцию

$$\psi(x; z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) \delta(n-x), \quad (4.3)$$

которая с помощью соотношения

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i x \tau) d\tau$$

преобразуется к виду

$$\psi(x; z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i x \tau) d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) \exp(i n \tau). \quad (4.4)$$

Ряд, стоящий под знаком интеграла, суммируется:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) \exp(i n \tau) = J_0\left(2z \sin \frac{\tau}{2}\right) \quad (4.5)$$

(см. [22], с. 117).

Объединив теперь соотношения (4.2) — (4.5), получим

$$\Gamma = \frac{\pi e^2}{k^2} \int \frac{\omega_p^2}{|\omega_{Hb}|} dp \int d\tau J_0\left(2z \sin \frac{\tau}{2}\right) \cos(x\tau) \times \\ \times \left( \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\omega_p \cos \theta - k_{\parallel} v}{\omega_p p v \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (4.6)$$

где  $x \equiv (\omega_p - k_{\parallel} v \cos \theta) / \omega_{Hb}$ ;  $z \equiv (k_{\perp} v \sin \theta) / \omega_{Hb}$ .

Если  $|k_{\parallel} \Delta v_{\parallel}| \gg |\omega_{Hb}|$ , то ширина интервала, который пробегает величина  $x$  при интегрировании по импульсам, велика по сравнению с единицей. При этом основной вклад в  $\Gamma$  вносят малые значения  $\tau$ , что позволяет заменить  $\sin(\tau/2)$  в аргументе функции Бесселя величиной  $\tau/2$  и выполнить интегрирование по  $\tau$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_0(z\tau) \cos(x\tau) d\tau = \begin{cases} 2/\sqrt{z^2 - x^2}, & |x| < |z|; \\ 0, & |x| > |z| \end{cases}$$

(см. [23], с. 750). Получающееся в итоге выражение для  $\Gamma$  совпадает с тем, что дает формула (2.10), если учесть в ней аксиальную симметрию распределения частиц и выполнить интегрирование по азимутальному углу.

Обратимся теперь к случаю изолированных резонансов. В зависимости от соотношения между разбросом электронов по скоростям и параметрами  $\omega_H/\omega_p$  и  $\gamma^{-1}$  здесь возможны различные оценки инкремента (4.2). Не выписывая этих оценок, отметим только, что наиболее прост случай предельно малых значений углового разброса пучка  $\Delta\theta$ , когда основная роль в сумме (4.2) принадлежит черенковскому резонансу. Соответствующий инкремент с точностью до множителя  $k_{\parallel}^2/k^2$  совпадает с инкрементом раскачки волн, бегущих вдоль пучка в плазме без магнитного поля. Если  $\omega_H/\omega_p \ll \ll \gamma^{-1}$ , то черенковский резонанс остается доминирующим вплоть до  $\Delta\theta \sim |\omega_H/(\omega_p\gamma)|$ . Если же  $\omega_H/\omega_p \gg \gamma^{-1}$ , то необходимость учета других резонансов возникает при  $\Delta\theta \sim (\omega_H/\omega_p)^{1/2}\gamma^{-3/2}$ , причем здесь важны прежде всего старшие циклотронные резонансы ( $n = \pm 1$ ), а вклад остальных остается малым вплоть до  $\Delta\theta \sim |\omega_H/(\omega_p\gamma)|$ . При дальнейшем увеличении разброса сначала происходит увеличение числа резонансов, определяющих основные качественные свойства инкремента, а затем наступает перекрытие этих резонансов.

**4.2. Возбуждение геликонов.** Как уже отмечалось в § 3, черенковское взаимодействие геликонов с релятивистским пучком отсутствует. Это позволяет исключить из суммы (4.1) слагаемое с  $n=0$ . Во всех остальных слагаемых можно пренебречь частотой волны по сравнению с  $n\omega_{Hb}$ . Подставив затем в формулу (4.1) явные выражения для частоты и вектора поляризации геликона [см. формулы (3.7), (3.8)], получим

$$\Gamma = \frac{2\pi^2 e^3 |\omega_H| k}{\omega_p^2 |k_{\parallel}| (1 + k^2 c^2/\omega_p^2)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\mu d\delta (k_{\parallel} v \cos\theta + n\omega_{Hb}) \times \\ \times \left[ \frac{n\omega_{Hb}}{k_{\perp}} J_n - \left| \frac{k_{\parallel}}{k} \right| v \sin\theta J_n' \right]^2 \frac{n\omega_{Hb}}{\mu v \sin\theta \cos\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (4.7)$$

Отсюда видно, что причиной неустойчивости является анизотропия функции распределения пучка, причем в случае монотонно убывающей функции  $f(\theta)$  к неустойчивости приводят только аномальные циклотронные резонансы ( $n\omega_{Hb} < 0$ ). Вследствие малости разброса электронов по скоростям эти резонансы не перекрываются, т. е. для каждой заданной волны в сумме (4.7) остается всего лишь одно слагаемое. Исключение составляют только резонансы с очень большими значениями  $n$ , но их вклад в инкремент пренебрежимо мал.

Если между угловым и энергетическим разбросами пучка выполняется соотношение  $\Delta\theta^2 \gg \Delta\gamma/\gamma$ , то в формуле (4.7) можно выполнить интегрирование по модулю импульса, заменив величины  $\mu$  и  $v$  под знаком интеграла их средними значениями. Выпишем результат, который получается при этом для инкремента, соответствующего первому циклотронному резонансу. (Именно этот резонанс ответствен за возбуждение геликонов холодным пучком):

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n} |\omega_H| \frac{m\omega_{Hb}k}{(1+k^2c^2/\omega_p^2)^2 k_{\parallel}^2 p v^2} \left[ \frac{\omega_{Hb}}{k_{\perp}} J_1 - \right. \\ \left. - \left| \frac{k_{\parallel}}{k} \right| v \sin \theta J_1' \right]^2 \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\cos \theta = -\omega_{Hb}/k_{\parallel} v}. \quad (4.8)$$

Здесь  $\Phi(\theta) \equiv (2\pi/n_b) \int_0^{\infty} f p^2 dp$ .

Инкремент (4.8) обращается в нуль при  $k_{\perp}=0$  и  $k_{\perp} \rightarrow \infty$  и имеет максимум при  $k_{\perp} \geq k_{\parallel}/\Delta\theta$ . Если  $\Delta\theta \geq |\omega_H/\omega_p|$ , то для максимального значения  $\Gamma$  справедлива следующая оценка:

$$\Gamma_{\max} \sim \omega_{Hb} \frac{n_b}{n} \frac{1}{(\Delta\theta)^3}. \quad (4.9)$$

**4.3. Возбуждение замагниченных электронных колебаний.** При описании гидродинамической неустойчивости этих колебаний использовалось предположение о малости плазменной частоты  $\omega_p$  по сравнению с циклотронной частотой электронов пучка  $\omega_{Hb}$ . Сохраним здесь это предположение. Вместе с условием малости углового разброса пучка оно позволяет пренебречь в формуле (4.1) всеми резонансами, за исключением трех старших ( $n=0$  и  $n=\pm 1$ ). Применительно к черенковскому резонансу формула (4.1) с учетом (3.14) и (3.15) дает

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \omega_p \frac{mc}{n} \frac{\beta_{\parallel}^2 (1-\beta_{\parallel}^2)^{3/2}}{(1-\beta_{\parallel}^2)^2 + \beta_{\parallel}^4 k_{\perp}^2 c^2/\omega_p^2} \left[ 1 - \beta_{\parallel}^2 - \beta_{\parallel}^2 \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_p^2} \right]^{1/2} \times \\ \times \int d\varphi \delta \left( \frac{v}{c} \cos \theta - \beta_{\parallel} \right) \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (4.10)$$

где  $\beta_{\parallel} \equiv \omega_k / (k_{\parallel} c)$ .

С учетом того, что в рассматриваемой ситуации аргумент функции  $J_0$  мал, эта функция заменена единицей. Инкремент (4.10) максимален при  $k_{\perp}=0$ . В максимуме он совпадает с инкрементом для ленгмюровской волны, бегущей вдоль пучка в плазме без магнитного поля.

Если волна возбуждается за счет циклотронного резонанса, то, как было показано в § 3, ее можно считать потенциальной. Тогда

$$\Gamma = \pm \frac{\pi}{8} \frac{1}{n} \frac{|k_{\parallel} k_{\perp}^2|}{k^3} \frac{\omega_p^3}{|\omega_{Hb}|} \times \\ \times \int dp \frac{mv}{p} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \delta(k_{\parallel} v \cos \theta \pm |\omega_{Hb}|). \quad (4.11)$$

Мы пренебрегли здесь производной  $\partial f/\partial p$ , что оправдано при  $\Delta\theta^2 \ll \ll |\omega_{Hb}/\omega_p| \Delta p/p|$ , и ограничились первым членом разложения функции Бесселя. Верхний знак в формуле (4.11) соответствует нормальному резонансу, нижний — аномальному. При монотонном угловом распределении пучка к раскатке приводит только ано-

мальный резонанс. Отметим, что вследствие убывания инкремента (4.11) с ростом магнитного поля циклотронное возбуждение волны оказывается менее эффективным, чем черенковское.

**4.4. Возбуждение медленных необыкновенных волн.** Рассматривая неустойчивость этих волн, ограничимся здесь случаем изолированных резонансов, что подразумевает выполнение условия  $\Delta\theta^2 \ll 1/\gamma$ . Выпишем сначала с помощью формулы (3.21), (4.1) инкремент, отвечающий черенковскому резонансу:

$$\Gamma = \frac{\pi}{2} \frac{\omega_p^2}{n} mc \left( \frac{\omega_p}{\omega_H} \right)^2 \frac{k_{\perp}^2 k_{\parallel} |\omega_H|/c}{(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 - \omega_H^2/c^2)^2} \int d\rho \delta(|\omega_H| - k_{\parallel} v \cos \theta) \times \\ \times \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (4.12)$$

Отсутствие в этой формуле функции Бесселя  $J_0$  связано с малостью ларморовского радиуса электронов. Учет конечности ларморовского радиуса существен только для волн с очень большими значениями  $k_{\perp}$ , которые при черенковском резонансе возбуждаются слабо. Заметим, что инкремент (4.12) с помощью простых переобозначений выражается через инкремент раскачки ленгмюровских волн, бегущих вдоль пучка. Это позволяет воспользоваться при анализе формулы (4.12) результатами § 2.

Найдем теперь инкременты, соответствующие циклотронным резонансам. Как видно из формулы (3.23), в случае холодного пучка максимум циклотронного инкремента достигается при  $k_{\perp} \rightarrow \infty$ , т. е. в области, где волну можно считать потенциальной. Если разброс пучка мал, то в кинетическом случае за счет циклотронных резонансов также возбуждаются преимущественно потенциальные волны. Для них

$$\Gamma = 2\pi^2 e^2 \omega_p^2 \frac{k_{\perp}^2}{k^4} \int d\rho \delta(|\omega_H| - n\omega_{Hb} - k_{\parallel} v \cos \theta) J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v \sin \theta}{\omega_{Hb}} \right) \times \\ \times \left[ \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial p} + \left( \frac{n |\omega_{Hb}|}{|\omega_H|} - \sin^2 \theta \right) \frac{1}{pv \sin \theta \cos \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right]. \quad (4.13)$$

Оценка этого инкремента зависит от соотношения между величинами  $\Delta\theta^2$  и  $(1/\gamma)\Delta\rho/p$ . Если  $\Delta\theta^2 \ll (1/\gamma)\Delta\rho/p$ , то в формуле (4.13) можно опустить производную  $\partial f/\partial p$  и положить в аргументе  $\delta$ -функции  $\cos \theta = 1$ . В этом случае неустойчивость обусловлена в основном анизотропией функции распределения пучка. Для резонансов с небольшими значениями  $n$  максимум инкремента отвечает возмущениям, у которых поперечный масштаб сопоставим с ларморовским радиусом частиц, а оценка максимального значения  $\Gamma$  имеет вид

$$\Gamma_{\max} \sim \omega_p \left| \frac{\omega_p}{\omega_H} \right|^3 \gamma \frac{p}{\Delta\rho} \frac{n_b}{n}. \quad (4.14)$$

Если  $\Delta\theta^2 \gg (1/\gamma)\Delta p/p$ , то основной причиной неустойчивости будет не анизотропия, а неравновесность энергетического распределения частиц. Оценивая соответствующий инкремент, можно полностью пренебречь разбросом электронов по импульсам. Тогда для первых циклотронных резонансов получается следующий результат:

$$\Gamma_{\max} \sim \omega_p \left| \frac{\omega_p}{\omega_H} \right|^3 \frac{1}{\Delta\theta^2} \frac{n_b}{n}. \quad (4.15)$$

Чтобы выявить связь обсуждаемой неустойчивости с формой энергетического распределения электронов, достаточно рассмотреть инкремент (4.13) для изотропной функции  $f(p)$ , положив дополнительно  $k_{\parallel} = 0$ . В этом случае важны только нормальные циклотронные резонансы. Если в точке резонанса производная  $df/dp$  положительна, то волна неустойчива. Добавим, что наличие у функции распределения участка с положительной производной может приводить также к раскачке обыкновенной электромагнитной волны с законом дисперсии  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$ . Подробное исследование неустойчивостей такого типа проведено в [24]. Эти неустойчивости определяют, в частности, характер реабсорбции синхротронного излучения в космической плазме [25].

## 5. Пучковая неустойчивость в неоднородной плазме

**5.1. Регулярная неоднородность.** Влияние неоднородности плазмы на пучковую неустойчивость обусловлено нарушением резонанса между частицами и волной за счет изменения волнового вектора в неоднородной среде. Рассмотрим этот эффект на примере ленгмюровских волн, для которых выход из резонанса связан преимущественно с неоднородностью концентрации плазмы. При достаточно плавном пространственном распределении концентрации зависимость волнового вектора от времени определяется уравнением геометрической оптики [26]

$$d\mathbf{k}/dt = -\partial\omega_p/\partial\mathbf{r}. \quad (5.1)$$

Малость групповой скорости ленгмюровской волны позволяет проинтегрировать это уравнение, считая его правую часть постоянной, т. е. пренебрегая пространственным смещением волнового пакета. При этом

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 - (\partial\omega_p/\partial\mathbf{r}) t, \quad (5.2)$$

где  $\mathbf{k}_0$  — начальное значение волнового вектора. Зная инкремент неустойчивости в однородной плазме  $\Gamma(\mathbf{k})$ , найдем теперь увеличение энергии волны, возбуждаемой пучком:

$$\frac{W}{W_T} = \exp \left[ 2 \int_{t_0}^{t_1} \Gamma \left( \mathbf{k}_0 - \frac{\partial\omega_p}{\partial\mathbf{r}} t \right) dt \right]. \quad (5.3)$$

Здесь  $W_T$  — уровень тепловых шумов, а пределы интегрирования соответствуют пересечению линии (5.2) с границами области по-

ложительных значений инкремента. Чтобы волна могла оказать заметное воздействие на электроны пучка, показатель экспоненты в формуле (5.3) должен превысить некоторую достаточно большую величину  $\Lambda$ ; эту величину обычно можно считать равной кулоновскому логарифму (см. соответствующие пояснения в обзоре [27]). Таким образом, условие возбуждения волны сводится к следующему неравенству:

$$2 \int_{t_0}^{t_1} \Gamma \left( \mathbf{k}_0 - \frac{\partial \omega_p}{\partial \mathbf{r}} t \right) dt \geq \Lambda. \quad (5.4)$$

Для оценок этот критерий удобно представить в виде

$$\Gamma \frac{|\Delta \mathbf{k}|}{|\partial \omega_p / \partial \mathbf{r}|} > \Lambda, \quad (5.5)$$

где  $|\Delta \mathbf{k}|$  — ширина резонансной области в направлении изменения волнового вектора. Рассмотрим в качестве иллюстрации тот случай, когда инкремент неустойчивости задается выражением (2.14), а градиент концентрации плазмы параллелен направлению инжекции пучка. Приняв во внимание, что для волны с заданным  $k_{\perp}$  значение  $\Delta k_{\parallel}$ , входящее в оценку (5.5), равно  $k_{\perp} \Delta \theta + (\omega_p/c) \Delta \theta^2$  (см. рис. 1), получим [28]

$$\left( 1 + \frac{k_{\perp} c}{\omega_p \Delta \theta} \right) / \left( 1 + \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega_p^2} \right) \geq \mu_{\parallel} \Lambda, \quad (5.6)$$

где

$$\mu_{\parallel} = \frac{c}{\omega_p} \left| \frac{\partial \ln \omega_p}{\partial z} \right| \left| \frac{n}{n_b} \frac{p_0}{mc} \right|.$$

Отсюда видно, что влиянию неоднородности наиболее подвержены волны, распространяющиеся под малым углом к оси пучка ( $k_{\perp} \lesssim \Delta \theta \omega_p / c$ ), а также волны с очень большими значениями  $k_{\perp}$ , которые, впрочем, представляют гораздо меньший интерес, так как из-за малости инкремента они возбуждаются относительно слабо даже в однородной плазме. Поэтому в случае, когда разрешено возбуждение волн с  $k_{\perp} = 0$ , а это имеет место при  $\mu_{\parallel} \Lambda \lesssim 1$ , роль неоднородности можно считать пренебрежимо малой. С другой стороны, при  $\mu_{\parallel} \Lambda > 1/(2\Delta \theta)$ , когда неравенство (5.6) не может выполняться ни для одной волны, неоднородность столь сильна, что она вообще подавляет пучковую неустойчивость. При промежуточных значениях  $\mu_{\parallel} \Lambda$  ( $1 \ll \mu_{\parallel} \Lambda \ll 1/\Delta \theta$ ) срыв неустойчивости имеет место лишь для достаточно малых либо, напротив, очень больших значений  $k_{\perp}$ .

Заметим, что результат взаимодействия волны с пучком зависит не только от модуля, но и от знака градиента плотности плазмы. Если плотность возрастает в направлении инжекции пучка, то волна, «двигаясь» по плоскости  $k_{\parallel}$ ;  $k_{\perp}$  согласно уравнению (5.2), сначала проходит ту часть резонансной области, где инкремент по-

ложителен (см. рис. 1), а затем попадает в зону затухания. Поэтому колебания, рожденные пучком, могут им же и поглощаться (см. задачу 5.1). Если же пучок инжектируется в сторону спада плотности плазмы, то направление движения волны на плоскости ( $k_{\parallel}$ ;  $k_{\perp}$ ) становится противоположным. Затухание колебаний на электронах пучка в этом случае несущественно, поскольку в течение всего того времени, которое волна проводит в зоне затухания, ее энергия близка к уровню тепловых шумов.

Используя соотношение (5.5), нетрудно выяснить также, при каких условиях становится существенной поперечная неоднородность плазмы. Соответствующие оценки можно найти в обзоре [27]. Не повторяя их здесь, укажем только, что при поперечной неоднородности для срыва неустойчивости необходим больший градиент плотности, чем при продольной. Это объясняется вытянутостью резонансной области в направлении  $k_{\perp}$  (см. рис. 1). Еще одна отличительная особенность поперечной неоднородности состоит в том, что в случае ультрарелятивистского пучка она не приводит к сколько-нибудь заметной реабсорбции волн, поскольку почти во всей резонансной области знак инкремента зависит только от продольной составляющей волнового вектора [см. формулу (2.13)].

**5.2. Случайная неоднородность.** Если неоднородности плотности плазмы носят не регулярный, а случайный характер\*, то вместо рассмотренного в предыдущем разделе плавного изменения волнового вектора возникает картина многократного рассеяния волн. При статических или достаточно медленно меняющихся во времени возмущениях плотности рассеяние упругое: оно выравнивает спектральную плотность волн вдоль поверхностей  $\omega_{\mathbf{k}} = \text{const}$ , делая спектр эргодическим (зависящим только от частоты). Для эргодизации спектра необходимо, чтобы характерное время рассеяния волн было намного меньше времени их возбуждения. Если это условие выполнено (а мы будем здесь предполагать, что дело обстоит именно так), то мощность, передаваемая пучком волнам с частотой  $\omega$ , задается следующей формулой\*\*:

$$Q_{\omega} = 2W(\omega) \int \Gamma(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) d\mathbf{k}, \quad (5.7)$$

где  $W(\omega)$  — спектральная плотность энергии, а  $\Gamma$  — инкремент неустойчивости. Покажем прежде всего, что в плазме без магнитного поля величина  $Q_{\omega}$  отрицательна. Это обстоятельство, обнаруженное в [29], означает, что упругое рассеяние волн способно в данном

---

\* Происхождение таких неоднородностей в реальных условиях может быть различным. Это могут быть неоднородности, связанные со способом приготовления плазмы, звуковые колебания, возбуждаемые текущим по плазме током, медленные возмущения, порожденные высокочастотным давлением самих ленгмюровских волн, и т. д.

\*\* Величина  $Q_{\omega}$  представляет собой мощность, приходящуюся на единичный частотный интервал, так что полная мощность, выделяемая в единице объема плазмы, равна  $\int Q_{\omega} d\omega$ .

случае привести к полному подавлению пучковой неустойчивости. Знак функции  $Q_\omega$  определяется знаком величины

$$\langle \Gamma \rangle = \int \Gamma(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_k) d\mathbf{k}, \quad (5.8)$$

которую будем называть интегральным инкрементом. Поскольку в отсутствие магнитного поля закон дисперсии ленгмюровских волн изотропен, вычисление  $\langle \Gamma \rangle$  включает в себя усреднение инкремента (2.10) по направлениям волнового вектора (см. задачу 5.2):

$$\frac{1}{4\pi} \int \Gamma d\omega = - \frac{4\pi^3 e^2 \omega_p^2}{k^3 c^2} \left[ \frac{m^2 c^2}{1 - \omega_p^2 / k^2 c^2} \bar{f} \Big|_{v = \frac{\omega_p}{k}} + \int_{v > \frac{\omega_p}{k}} 2p\bar{f} dp \right], \quad (5.9)$$

где  $\bar{f}$  — усредненная по углам функция распределения пучка.

Отсюда видно, что при любом значении модуля волнового вектора, т. е. при любой частоте, вклад затухания в  $\langle \Gamma \rangle$  действительно больше вклада накачки.

Выясним теперь, как влияет на интегральный инкремент наличие в плазме магнитного поля. Здесь возможна качественно новая ситуация: если поле не слишком мало, то появляется область частот, в которой величина  $\langle \Gamma \rangle$  положительна, т. е. упругое рассеяние волн само по себе не обеспечивает стабилизации пучковой неустойчивости. Зависимость  $\langle \Gamma \rangle$  от магнитного поля обусловлена, вообще говоря, двумя факторами (влиянием поля на инкремент  $\Gamma$  и на закон дисперсии волн  $\omega_k$ ), но можно показать, что в действительности существенно только изменение закона дисперсии\*. Поэтому, вычисляя  $\langle \Gamma \rangle$ , с самого начала воспользуемся для  $\Gamma$  выражением (2.10). Хотя формула (2.10) относится лишь к случаю сильного перекрытия циклотронных резонансов, она оказывается пригодной для вычисления  $\langle \Gamma \rangle$  также и в случае, когда резонансы расщеплены. Причина в том, что при  $\omega_H \ll \omega_p$  интегральный инкремент включает в себя вклады сразу многих резонансов, а суммирование этих вкладов сводится к замене в формуле (5.8) истинного инкремента (4.2) выражением (2.10) (см. [30]).

Дальнейшие выкладки для сокращения записи проведем в безразмерных переменных, которые вводятся посредством следующих замен:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k} &\rightarrow [\omega_p/c] \mathbf{k}; & \mathbf{p} &\rightarrow [mc] \mathbf{p}; & \mathbf{v} &\rightarrow [c] \mathbf{v}; \\ \omega_k - \omega_p &\rightarrow \left[ \frac{\omega_H^2}{2\omega_p} \right] \omega_k; & \omega - \omega_p &\rightarrow \left[ \frac{\omega_H^2}{2\omega_p} \right] \omega; \\ f &\rightarrow \left[ \frac{n_b}{(mc)^3} \right] f; & \Gamma &\rightarrow \left[ \frac{2\pi^2 e^2 n_b}{m\omega_p} \right] \Gamma; \\ \langle \Gamma \rangle &\rightarrow \left[ \frac{4\pi^2 e^2 n_b}{m\omega_H^2} \left( \frac{\omega_p}{c} \right)^3 \right] \langle \Gamma \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

\* Магнитная добавка к плазменной частоте определяется формулой (3.6).



В новых обозначениях закон дисперсии ленгмюровских волн и интегральный инкремент имеют вид

$$\omega_k = (k_{\perp}^2/k^2)(1 - 1/k^2) + \beta k^2; \quad (5.11)$$

$$\langle \Gamma \rangle = \int dk \int dp \int \frac{k}{k^2} \frac{\partial f}{\partial p} \delta(\omega - \omega_k) \delta(1 - kv), \quad (5.12)$$

где  $\beta \equiv 3r_D^2 \omega_p^4 / \omega_H^2 c^2 = 12\pi nT/H^2$ , а безразмерная частота отсчитывается от уровня, отвечающего плазменной частоте.

При достаточно малом разбросе пучка в формуле (5.12) можно положить  $f = \delta(\mathbf{p}_{\perp}) \delta(p_{\parallel} - p)$ , где  $p$  — средний импульс электронов, и выполнить интегрирование по  $\mathbf{p}_{\perp}$  и  $p_{\parallel}$ :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}} \int dk \left(1 - v^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k^2}\right) \delta'(1 - k_{\parallel} v) \delta(\omega - \omega_k).$$

Выполнив теперь интегрирование по  $\mathbf{k}_{\perp}$  и  $k_{\parallel}$ , получим окончательно

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\pi}{pv} \frac{\partial}{\partial k_{\parallel}} \left( \frac{k^2 - k^2 k_{\parallel}^2 v^2}{k^2 \beta + k^2 k_{\parallel}^2 + k^2 - 2k_{\parallel}^2} \right) \Big|_{k_{\parallel} = 1/v}. \quad (5.13)$$

Здесь  $k^2$  следует рассматривать как функцию  $k_{\parallel}$  и  $\omega$ , определяемую условием  $\omega_k = \omega$ , а дифференцирование по  $k_{\parallel}$  ведется при постоянном значении  $\omega$ .

Чтобы проследить за изменением  $\langle \Gamma \rangle$  при увеличении напряженности магнитного поля, обратимся к двум предельным случаям:  $\beta \rightarrow \infty$  и  $\beta \rightarrow 0$ . В первом из них преобладает тепловой вклад в дисперсию ленгмюровских волн, так что  $\omega_k \approx \beta k^2$ . При этом

$$\langle \Gamma \rangle = -\frac{4\pi}{p\omega} \begin{cases} 0, & \omega < \beta/v^2; \\ 1, & \omega > \beta/v^2. \end{cases} \quad (5.14)$$

В соответствии с результатом работы [29] это выражение отрицательно.

В пределе  $\beta \rightarrow 0$ , когда дисперсия волн определяется преимущественно магнитным полем, формулы (5.11) и (5.13) дают

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{2\pi k^4 v^2}{p} \frac{k^6 (v^2 + 1) - k^4 (v^4 + 2v^2 + 5) + k^2 (3v^2 + 7) - 4}{[k^2 (1 + v^2) - 2]^3}. \quad (5.15)$$

Здесь квадрат волнового числа связан с  $\omega$  и  $v$  соотношением

$$\omega = (1 - 1/k^2 v^2)(1 - 1/k^2). \quad (5.16)$$

В нерелятивистском ( $p \ll 1$ ) и ультрарелятивистском ( $p \gg 1$ ) случаях формула (5.15) упрощается и принимает следующий вид:

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{2\pi}{p^3} \frac{1}{(1 - \omega)^2}, \quad p \ll 1, \quad 0 < \omega < 1; \quad (5.17)$$

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{\pi}{2p} \frac{2\omega^{1/2} - 1}{\omega^{1/2} (1 - \omega^{1/2})^2}, \quad p \gg 1, \quad 0 < \omega < 1. \quad (5.18)$$

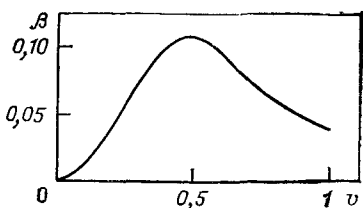


Рис. 3. К смене знака интегрального инкремента. В области, лежащей выше кривой  $\beta(v)$ , интегральный инкремент отрицателен при всех значениях  $\omega$

Сравнение этих выражений с формулой (5.14) демонстрирует возможность смены знака интегрального инкремента при увеличении напряженности магнитного поля. Граничное значение  $\beta$ , при котором впервые происходит такая смена, зависит от скорости пучка. Эта зависимость показана на рис. 3. Она получена численно из соотношений (5.11) и (5.13).

Как видно из формул (5.17) и (5.18), при  $\beta \rightarrow 0$  и  $\omega < 1/4$  знаки  $\langle \Gamma \rangle$  для нерелятивистского и ультрарелятивистского пучков противоположны. Поэтому должна существовать некоторая критическая скорость пучка  $v_0$ , при которой область затухания, присутствующая в инкременте (5.18), исчезает. Чтобы найти эту скорость, рассмотрим поведение  $\langle \Gamma \rangle$  при  $\omega \rightarrow 0$ . В этом случае  $k \approx 1/v$  и

$$\langle \Gamma \rangle = (2\pi/pv^2)(1 - 2v^2)/(1 - v^2) \quad (5.19)$$

[см. формулу (5.15)]. Видно, что для волн с  $\omega \rightarrow 0$  инкремент  $\langle \Gamma \rangle$  меняет знак при  $v = 1/\sqrt{2}$ . Покажем теперь, что при  $v < 1/\sqrt{2}$  инкремент (5.15) всегда положителен. Знаменатель в формуле (5.15) положителен, поскольку  $k^2$  изменяется в пределах от  $1/v^2$  до  $\infty$ , так что знак  $\langle \Gamma \rangle$  определяется числителем, представляющим собой многочлен третьей степени относительно  $k^2$ . Если  $k^2 \geq 1/v^2$  и  $v < 1/\sqrt{2}$ , то числитель также положителен, поскольку при  $k^2 = 1/v^2$  он положителен вместе со всеми своими производными, в чем легко убедиться непосредственно. Таким образом, искомая критическая скорость  $v_0$  равна  $1/\sqrt{2}$ .

Найдем в заключение максимум интегрального инкремента при малых  $\beta$ . Формула (5.15) не позволяет это сделать, так как при  $\omega \rightarrow 1$  ( $k^2 \rightarrow \infty$ ) она дает для  $\langle \Gamma \rangle$  расходящийся результат. Расходимость исчезает, если учесть конечность величины  $\beta$ , т. е. тепловую добавку к закону дисперсии волны. Уточненное выражение для  $\langle \Gamma \rangle$  в окрестности точки  $\omega = 1$  имеет вид

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{2\pi}{pv^2} \frac{1 - \omega}{[(1 - \omega)^2 + 4\beta/v^2]^{3/2}}. \quad (5.20)$$

Отсюда следует, что  $\langle \Gamma \rangle_{\max} = \pi/(p\beta v \sqrt{3})$ .

**Задача 5.1.** Показать, что в плазме с нарастающей вдоль направления инжекции пучка плотностью затухание ленгмюровских волн на электронах пучка преобладает над раскачкой.

**Решение.** Соотношение между накачкой и затуханием определяется знаком интеграла от инкремента  $\Gamma$  вдоль «траектории» волны на плоскости  $k_{\parallel}; k_{\perp}$ ,

т. е. вдоль линии  $k_{\perp} = \text{const}$ . Поскольку инкремент имеет вид (2.10), достаточно выяснить знак величины

$$I = \int \frac{1}{k^2} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega_p - k_{\parallel} v_{\parallel} - k_{\perp} v_{\perp}) d\mathbf{p} dk_{\parallel}.$$

Учитывая малость разброса электронов по импульсам, функцию  $f$  здесь можно заменить  $\delta$ -функцией  $f = n_0 \delta(p_{\parallel} - p_0) \delta(p_{\perp})$ . В результате получим

$$I = - \frac{2\omega_p n_0 k_{\perp}^2 v_0^2}{(k_{\perp}^2 v_0^2 + \omega_p^2)^2} \frac{v_0}{c} \frac{1}{\sqrt{p_0^2 + m^2 c^2}},$$

где  $v_0 \equiv |c p_0 / \sqrt{p_0^2 + m^2 c^2}|$ . Знак « $\rightarrow$ » в этом выражении указывает на преобладающую роль затухания.

**Задача 5.2.** Найти средний по направлениям волнового вектора инкремент возбуждения ленгмюровских волн в плазме без магнитного поля [29].

**Решение.** Воспользовавшись формулой (2.10), представим искомую величину в виде

$$\frac{1}{4\pi} \int \Gamma dO = \frac{\pi}{2} \omega_p e^2 \int d\mathbf{p} \left( \mathbf{a} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right),$$

где  $\mathbf{a} \equiv \int (\mathbf{k}/k^2) \delta(\omega_p - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}$ , а  $d\mathbf{v}$  — элемент телесного угла в  $\mathbf{k}$ -пространстве. Элементарное интегрирование дает

$$\mathbf{a} = \frac{2\pi\omega_p \mathbf{v}}{k^3 v^3} \begin{cases} 1, & k > \omega_p/v; \\ 0, & k < \omega_p/v. \end{cases}$$

Для вычисления интеграла по импульсам введем сферические координаты  $p, \theta, \varphi$ . В результате получим

$$\frac{1}{4\pi} \int \Gamma dO = \frac{4\pi^3 e^2 \omega_p^2}{k^3 c^2} \int_{v > \omega_p/k} (p^2 + m^2 c^2) \frac{\partial \bar{f}}{\partial p} dp,$$

где черта означает усреднение по  $\theta$  и  $\varphi$ . При интегрировании по частям отсюда получается формула (5.9). Отметим, что усредненное значение  $\Gamma$  равно инкременту (2.10), вычисленному по усредненной функции распределения.

## 6. Квазилинейная релаксация РЭП в плазме без магнитного поля

Линейная теория, изложенная в § 1—5, не дает ответа на вопрос о последствиях пучковой неустойчивости, так как в ней не учитываются факторы, ограничивающие экспоненциальный рост колебаний. Одним из таких факторов является квазилинейная диффузия [31, 32], приводящая к перестройке функции распределения пучка  $f$  под воздействием возбуждаемых волн. Хотя в реальных условиях стабилизация неустойчивости чаще обусловлена другим эффектом — нелинейным взаимодействием волн друг с другом, уделите все же некоторое внимание чисто квазилинейной задаче, по-

сколькx это позволит получить ряд оценок, полезных для построения более реалистичной теории.

Квазилинейное приближение описывает, как известно, только кинетический режим пучковой неустойчивости, что предполагает наличие у пучка не слишком малого разброса [см. неравенства (2.6), (2.9)]. Ориентируясь здесь на ультрарелятивистские пучки, будем считать, что наряду с неравенствами (2.6), (2.9) выполняется также неравенство (2.7). В случае стационарной инжекции такого пучка в полупространство  $z > 0$ , заполненное однородной плазмой, система квазилинейных уравнений может быть записана в следующем виде [15]\*:

$$\frac{3T_e}{m\omega_p} k \cos \theta' \frac{\partial N_k}{\partial z} = 2\Gamma N_k; \quad (6.1)$$

$$c \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 \left( D_{pp} \frac{\partial f}{\partial p} + D_{p\theta} \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{p \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left( D_{p\theta} \frac{\partial f}{\partial p} + D_{\theta\theta} \frac{1}{p} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (6.2)$$

Здесь инкремент неустойчивости  $\Gamma(k; \theta'; z)$  задается формулой (2.11), а коэффициенты диффузии связаны со спектральной плотностью волн  $N(k; \theta'; z)$  соотношениями:

$$\left. \begin{matrix} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{matrix} \right\} = \frac{m\omega_p^5}{4\pi^2 n c^3} \int_{\frac{\omega_p}{c}}^{\infty} \frac{dk}{k} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{N \sin \theta' d\theta'}{[(\cos \theta'_1 - \cos \theta') (\cos \theta' - \cos \theta'_2)]^{1/2}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \end{matrix} \right\}; \quad (6.3)$$

$$\zeta = [\cos \theta - (kc/\omega_p) \cos \theta'] / \sin \theta;$$

$$\cos \theta_{1,2} = (\omega_p/kc) \left( \cos \theta \pm \sin \theta \sqrt{k^2 c^2 / \omega_p^2 - 1} \right).$$

В формулах (6.1)–(6.3) использованы сферические координаты  $p$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $k$ ,  $\theta'$ ,  $\varphi'$ . Функция  $N$  нормирована условием  $\omega_p \int N dk / (2\pi)^3 = U$ , где  $U$  — энергия волн в единице объема плазмы.

Основная качественная особенность квазилинейной релаксации РЭП в однородной плазме состоит в том, что пучок теряет энергию, практически не рассеиваясь, т. е. релаксация почти одномерна. Первое указание на одномерность релаксации содержится в [12]. Вывод об одномерности следует из анализа выражений для инкремента неустойчивости и коэффициентов диффузии. Напомним, что для квазилинейных задач характерно «стягивание» спектра волн в узкую окрестность максимума инкремента [33]. Ширина этой окрестности в  $\sqrt{\Lambda}$  раз, где  $\Lambda$  — кулоновский логарифм, меньше ши-

\* В уравнении (6.1) не учитывается влияние пучка на групповую скорость ленгмюровских волн. Это приводит к дополнительному ограничению сверху на концентрацию пучка (более жесткому, чем условие применимости кинетического приближения)  $n_b/n \ll (T_e/mc^2) \gamma (\Delta\theta)^4$ .

рины самого максимума. Как было показано в § 2, максимум инкремента в интересующем нас случае соответствует волнам, бегущим почти вдоль направления инжекции пучка (см. рис. 2). Именно эти волны и возбуждаются в квазилинейном режиме до наиболее высокого уровня.

Зная положение и ширину спектра волн, можно с помощью формулы (6.3) оценить отношение коэффициентов диффузии  $D_{pp}$  и  $D_{\theta\theta}$ :  $D_{pp}/D_{\theta\theta} \sim (\Delta\theta)^{-2} \gg 1$ . Эта оценка показывает, что диффузия по импульсу идет много быстрее диффузии по углу, причем за время увеличения углового разброса пучка вдвое по сравнению с начальным значением  $\Delta\theta_0$  электроны теряют в плазме уже около половины своей начальной энергии.

Выделим в плазме слой, на выходе из которого средняя энергия частиц пучка равна половине начальной и условимся называть толщину этого слоя  $l$  длиной релаксации. Через левую границу в слой входит электронный пучок, а через правую слой покидают, кроме пучка, еще и рожденные им волны. Чтобы найти плотность энергии волн  $U$  справа от области релаксации, заметим, что здесь поток энергии волн, равный  $v_g U$ , где  $v_g$  — характерная групповая скорость, по определению становится сравнимым с начальным потоком энергии частиц пучка. Поскольку групповая скорость интересующих нас волн по порядку равна  $T_e/mc$ , оценка для  $U$  оказывается следующей:

$$U \sim n_b m c^2 \gamma m c^2 / T_e, \quad \gamma \gg 1. \quad (6.4)$$

Длину релаксации  $l$  можно оценить из того условия, чтобы волна, распространяющаяся в глубь плазмы, успевала в достаточной мере нарасти на этой длине:  $l \sim \Delta v_g / \Gamma$ . Учитывая одномерность релаксации, инкремент  $\Gamma$  в этой формуле следует вычислять по начальному угловому разбросу пучка  $\Delta\theta_0$ . В итоге имеем [см. (2.14)]

$$l \sim \Lambda \frac{c}{\omega_p} \frac{n}{n_b} \frac{T_e}{m c^2} \frac{p_0}{m c} \Delta\theta_0^2. \quad (6.5)$$

Полученный результат фактически следует понимать как оценку длины релаксации снизу, так как из-за нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости длина релаксации может сильно возрасти.

Оценки (6.4) и (6.5) согласуются с аналитическим решением модельной задачи, в которой спектр возбуждаемых пучком волн предполагается в точности одномерным [15, 27]. Не приводя здесь это решение, отметим лишь одну его любопытную особенность: в ходе релаксации появляются не только замедленные, но также и ускоренные электроны. В этом отношении релятивистская задача качественно отличается от нерелятивистской (при одномерной релаксации нерелятивистского пучка электроны могут только замедляться [34]). Механизм ускорения электронов в ультрарелятивистском случае показан на рис. 4. Из условия черенковского резонанса следует, что при одномерном спектре колебаний волна с волновым числом  $k$  взаимодействует со всеми электронами, лежащими

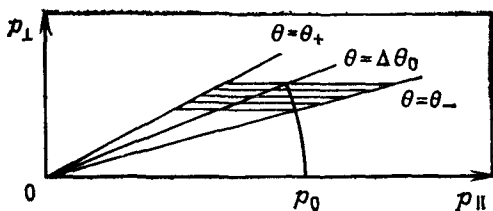


Рис. 4. Релаксация РЭП при одномерном спектре колебаний. В начале релаксации электроны лежат на дуге окружности радиусом  $p_0$

в плоскости ( $p_{\parallel}$ ;  $p_{\perp}$ ) на луче, образующем угол  $\theta = \arccos(\omega_p/kc)$  с осью  $z$ . Если же в плазме возбуждены волны с волновыми векторами в некотором интервале  $k_- \leq k \leq k_+$ , то с ними взаимодействуют электроны, лежащие на лучах с углами  $\theta$  от  $\theta_- = \arccos(\omega_p/k_-c)$  до  $\theta_+ = \arccos(\omega_p/k_+c)$  (рис. 4). Электрическое поле волн в одномерном спектре направлено вдоль оси  $z$ . Поэтому процесс релаксации сводится к диффузии электронов в пространстве импульсов вдоль линий  $p_{\perp} = \text{const}$ . При этом, как видно из рис. 4, часть электронов пучка обязательно увеличивает свою энергию по сравнению с начальной.

Наряду с исследованием релаксации пучка, обладающего достаточно большим угловым разбросом, представляет интерес также вопрос о релаксации первоначально холодного пучка. Соответствующая задача с начальными условиями для пучка в однородной неограниченной плазме рассмотрена аналитически в [12, 16]. Позднее было проведено также численное моделирование процесса релаксации (сначала в одномерном варианте [35, 36], а затем с учетом возбуждения косых волн [37]). Хотя для количественного решения этой задачи квазилинейное приближение непригодно, качественные особенности релаксации с его помощью выяснить можно. Дело в том, что, как было отмечено в § 2, максимум инкремента неустойчивости для пучка с малым разбросом лежит в области стыковки гидродинамического и кинетического приближений. Поскольку ход релаксации определяется теми волнами, уровень которых максимален, все оценки даже для первоначально холодного пучка можно делать, исходя из квазилинейного приближения. Необходимо только учесть, что теперь в процессе релаксации участвуют волны, распространяющиеся под углом к оси пучка, что делает релаксацию существенно трехмерной. Электрическое поле косых волн приводит к увеличению углового разброса пучка.

Чтобы связать изменение углового разброса с потерей энергии, оценим отношение коэффициентов диффузии  $D_{pp}$  и  $D_{\theta\theta}$ . Если характерное значение поперечной составляющей волнового вектора возбуждаемых волн равно  $k_0$ , причем  $k_0 \geq \Delta\theta\omega_p/c$ , то  $D_{pp}/D_{\theta\theta} \sim \omega_p^2/(k_0^2c^2)$ . По смыслу величин  $D_{pp}$  и  $D_{\theta\theta}$  можно написать, что

$$(\Delta p/p_0)^2 \approx (\Delta\theta)^2 \omega_p^2/(k_0^2c^2), \quad (6.6)$$

где  $\Delta\theta$  и  $\Delta p$  — средние значения разброса частиц по углу и по импульсу в каждый момент времени. Величина  $k_0$  в этой формуле отвечает точке сшивки гидродинамического и кинетического выражений для инкремента ( $|\kappa\Delta v| \sim \Gamma$ ), т. е. [см. формулу (2.8)]

$$\frac{\Delta\theta^2}{2} + \frac{k_0 c}{\omega_p} \Delta\theta \approx \left(\frac{n_b}{n\gamma}\right)^{1/3} \left[ \frac{\omega_p^2}{\omega_p^2 + k_0^2 c^2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \Delta\theta^2\right) + \frac{k_0^2 c^2}{\omega_p^2 + k_0^2 c^2} \right]^{1/2}.$$

Выясним теперь, как изменяются с увеличением углового разброса величины  $k_0$  и  $\Delta p$ . При самых малых значениях  $\Delta\theta$  ( $\Delta\theta \ll (n_b/n)^{1/3}/\gamma^{1/2}$ )

$$k_0 c/\omega_p \sim (1/\Delta\theta) (n_b/n\gamma)^{1/3}; \quad \Delta p \sim p_0 \Delta\theta^2 (n_b/n\gamma)^{-1/3}.$$

Для времени возрастания  $\Delta\theta$  до  $(n_b/n\gamma)^{1/3}$  можно написать следующую оценку:

$$t \sim \Lambda/\Gamma \sim (\Lambda/\omega_p) (n_b/n\gamma)^{-1/3}.$$

К моменту окончания этой стадии релаксации  $\Delta p/p_0 \sim \Delta\theta \sim (n_b/n\gamma)^{1/3}$  и потери энергии, следовательно, очень малы. Кроме того, столь малый разброс по модулю импульса еще не сказывается на разбросе частиц пучка по скоростям, так что  $k\Delta v \approx k c \Delta\theta$ .

При дальнейшем увеличении  $\Delta\theta$

$$k_0 c/\omega_p \approx (1/\Delta\theta^2) n_b/n\gamma; \quad \Delta p \sim p_0 (\Delta\theta)^4 (n_b/n\gamma)^{-1}. \quad (6.7)$$

Граница применимости этой формулы зависит от соотношения между величинами  $(n_b/n)^{1/3}$  и  $\gamma^{-1}$ . Если  $(n_b/n)^{1/3} < \gamma^{-1}$ , то формула (6.7) справедлива до тех пор, пока угловой разброс не достигает значения  $(n_b/n)^{1/3}$ . Это происходит за время  $t \sim (\Lambda/\omega_p) \gamma (n_b/n)^{-1/3}$ . При  $\Delta\theta = (n_b/n)^{1/3}$  разброс электронов по импульсу, равный  $p_0 \gamma (n_b/n)^{1/3}$ , начинает существенно влиять на величину  $|k\Delta v|$ , и неустойчивость оказывается кинетической для всех воли. Далее эволюция пучка может быть количественно описана в рамках квазилинейного приближения, однако инкремент неустойчивости при этом будет определяться не только угловым, но и энергетическим разбросом электронов, что заметно усложняет исследование квазилинейных уравнений. Если же  $(n_b/n)^{1/3} > \gamma^{-1}$ , то формула (6.7) применима вплоть до  $\Delta\theta \sim (n_b/n\gamma)^{1/4}$ . При  $\Delta\theta \approx (n_b/n\gamma)^{1/4}$  неустойчивость переходит в кинетическую стадию [см. неравенство (2.9)]\*. К моменту перехода [ $t \sim (\Lambda/\omega_p) \times (n_b/n\gamma)^{-1/2}$ ] спектр колебаний становится почти одномерным ( $k_0 c/\omega_p \sim \Delta\theta$ ) и пучок теряет уже значительную часть своей начальной энергии ( $\Delta p \sim p_0$ ). Нетрудно проверить, что при  $(n_b/n)^{1/3} > \gamma^{-1}$  разброс электронов по скоростям в течение всего процесса релаксации обусловлен преимущественно угловым разбросом пучка.

Перечисленные результаты могут быть переформулированы применительно к задаче о стационарной инжекции пучка в плазму. При этом, правда, возникает дополнительное усложнение, связанное с тем, что холодный пучок может существенно влиять на групповую скорость раскачиваемых волн.

В заключение остановимся вкратце на особенностях релаксации пучка в неоднородной плазме. При этом ограничимся случаем регулярной неоднородности, подразумевая дополнительно, что концентрация плазмы зависит только от продольной координаты  $z$  и растет в направлении инжекции пучка. Формально учет неоднородности сводится к добавлению в левую часть уравнения (6.1) нового слагаемого —  $(\partial\omega_p/\partial z) (\partial N/\partial k)$ . Как было показано в § 5, роль

\* В [16] в этом месте допущена неточность: для  $\Delta\theta$  дана заниженная оценка  $\Delta\theta \sim \gamma^{-1/2} (n_b/n)^{1/6}$ .

продольной неоднородности характеризуется параметром  $\mu_{\parallel} \Lambda$  [см. (5.6)]. Если  $\mu_{\parallel} \Lambda \ll 1$ , то неоднородность практически не влияет на возбуждение волн и, следовательно, на процесс релаксации. Если же  $\mu_{\parallel} \Lambda \gg 1$ , то ситуация меняется: неоднородность срывает возбуждение волн с  $k_{\perp} \leq (\omega_p/c) \Delta\theta$ , определявших картину релаксации в однородной плазме. Вместо этих волн раскачиваются волны с существенно большими значениями  $k_{\perp}$  [см. (5.6)]:

$$k_{\perp} \geq (\omega_p/c) \mu_{\parallel} \Lambda \Delta\theta \gg (\omega_p/c) \Delta\theta.$$

В результате возрастает поперечная составляющая электрического поля волн и становится более быстрой диффузия электронов пучка по углу. Соотношение между коэффициентами диффузии  $D_{pp}$  и  $D_{\theta\theta}$  оказывается следующим:  $D_{\theta\theta}/D_{pp} \geq (\mu_{\parallel} \Lambda \Delta\theta)^2$ . Теперь при увеличении углового разброса вдвое по сравнению с начальным значением пучок теряет уже не половину своей энергии, как это было в однородной плазме, а лишь малую ее часть:

$$\Delta p/p_0 \leq \mu_{\parallel} \Lambda (\Delta\theta_0)^2 \leq (\mu_{\parallel} \Lambda)^{-1}.$$

Согласно условию (5.6) диффузия электронов по углу должна продолжаться до тех пор, пока разброс  $\Delta\theta$  не станет порядка  $(\mu_{\parallel} \Lambda)^{-1}$ , после чего раскачка колебаний прекращается и релаксация заканчивается. Весь этот процесс удастся описать количественно [15, 27], что, однако, требует довольно громоздких вычислений. Приведем здесь лишь конечные формулы для зависимостей углового разброса пучка  $\Delta\theta$  и плотности энергии ленгмюровских волн от координаты  $z$ :

$$\Delta\theta = 2,7 (\xi/\Lambda)^{1/2};$$

$$U = n_b \frac{mc^2}{3T_e} \frac{cp_0}{\mu_{\parallel} \Lambda} \begin{cases} 0,57 (\mu_{\parallel}^2 \Lambda^4 \xi)^{1/2}, & \xi \ll \xi_m; \\ 3,76 & \xi = \xi_m; \\ 8,31 (\mu_{\parallel}^2 \Lambda^4 \xi)^{-1/2}, & \xi \gg \xi_m; \end{cases}$$

$$\xi \equiv \frac{mc^2}{3T_e} \frac{\omega_p}{c} \frac{n_b}{n} \frac{mc}{p_0} z; \quad \xi_m \equiv \frac{81}{\mu_{\parallel}^2 \Lambda^4}.$$

Интересная особенность этого решения состоит в том, что релаксация идет в две стадии. На первой из них ( $\xi \leq \xi_m$ ) колебания возбуждаются пучком, а на второй частично им же поглощаются. На возможность такого явления уже указывалось в § 5. Процесс релаксации заканчивается при  $\xi \sim 1/(\mu_{\parallel}^2 \Lambda)$ , когда угловой разброс пучка достигает критического значения, соответствующего срыву неустойчивости. При дальнейшем увеличении  $\xi$  энергия волн и разброс электронов уже не изменяются.



## 7. Нелинейное взаимодействие и струйные спектры ленгмюровских волн

Рассматривая нелинейные эффекты с участием возбуждаемых пучком волн, будем действовать в рамках теории слабой турбулентности [38—40], которая, как известно, основана на предположении о малости энергии волн  $U$  по сравнению с тепловой энергией плазмы и включает в себя процедуру статистического усреднения по фазам взаимодействующих волн. В первом порядке по параметру  $U/(nT)$  уравнения теории слабой турбулентности совпадают с квазилинейными уравнениями. В следующем (втором) порядке они описывают явления индуцированного рассеяния и распада волн. Для системы плазма—пучок величина  $U/(nT)$  обычно пропорциональна другому малому параметру:  $n_b/n$  (примером может служить квазилинейная релаксация пучка в однородной плазме). При этом оказывается, что квазилинейный вклад в кинетическое уравнение для волн и вклад процессов второго порядка зависят от  $n_b/n$  одинаково (квадратично)\*. Иными словами, процессы второго порядка (в отличие от остальных) могут быть существенными даже для пучков достаточно малой плотности. В этом смысле они сильно выделены по сравнению со всеми другими процессами, относительный вклад которых убывает с уменьшением  $n_b$ .

В простейшем случае изотермической плазмы без магнитного поля ленгмюровские волны, возбуждаемые пучком, могут участвовать в следующих процессах второго порядка (рис. 5):

- 1) рассеяние на электронах и ионах плазмы (рис. 5, а);
- 2) рассеяние на электронах и ионах плазмы с трансформацией в электромагнитные волны (рис. 5, б);
- 3) слияние двух ленгмюровских волн в электромагнитную волну (рис. 5, в);
- 4) слияние ленгмюровской и электромагнитной волн в электромагнитную волну (рис. 5, г).

Сравнение вероятностей перечисленных процессов показывает, что в задаче о нагреве плазмы с помощью РЭП главным из них обычно является индуцированное рассеяние ленгмюровских волн

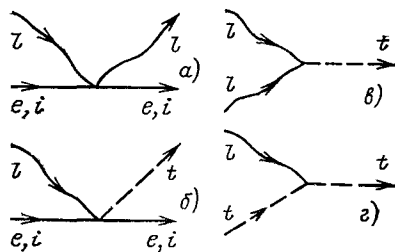


Рис 5. Нелинейные процессы с участием ленгмюровских волн:  
 $e$  — электрон;  $i$  — ион;  $l$  — ленгмюровская волна;  $t$  — электромагнитная волна

\* Дополнительная малость квазилинейного вклада обусловлена тем, что параметр  $n_b/n$  определяет не только энергию волн, но также и значение инкремента

на ионах\*. Именно этому процессу и уделено ниже основное внимание.

При рассеянии волны с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega(\mathbf{k})$  на частице, движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , волновой вектор  $\mathbf{k}'$  и частота  $\omega(\mathbf{k}')$  вторичной волны удовлетворяют соотношению

$$\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}') = (\mathbf{k} - \mathbf{k}', \mathbf{v}), \quad (7.1)$$

которое представляет собой условие черенковского взаимодействия частицы с биениями, образованными парой волн. В случае максвелловского распределения частиц биения затухают, т. е. энергия частиц растет, а энергия волн, испытывающих рассеяние, уменьшается [42]. Поскольку число волн при рассеянии остается неизменным, уменьшение энергии волн может происходить только в результате уменьшения их частоты. Отсюда следует, что рассеяние ведет к перекачке плазмонов в длинноволновую часть спектра. Возбуждение, затухание и спектральная перекачка волн описываются следующим кинетическим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_{\mathbf{k}} = 2\Gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} + N_{\mathbf{k}} \int A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}'} \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (7.2)$$

В случае рассеяния на ионах входящее сюда ядро  $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  имеет вид (см., например, [41])

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{2\pi^2 e^2}{m} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \left| \frac{\epsilon_e(\omega_-; \mathbf{k}_-) - 1}{\epsilon(\omega_-; \mathbf{k}_-)} \right|^2 \int \mathbf{k}_- \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{p}} \delta(\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v}) d\mathbf{p}, \quad (7.3)$$

где  $\omega_- = \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}')$ ;  $\mathbf{k}_- = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ;  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость плазмы, а  $\epsilon_e$  — ее электронная часть;  $f_i$  — функция распределения ионов. Прежде чем приступить к решению уравнения (7.2), упростим ядро (7.3); воспользовавшись для этого малостью шага спектральной перекачки. Из соотношения (7.1) видно, что в элементарном акте рассеяния частота ленгмюровской волны изменяется на  $k v_{Ti}$ , а модуль волнового вектора — на

$$\Delta k \sim \frac{1}{3} \frac{\omega_p}{v_{Te}} \left( \frac{m}{M} \right)^{1/2}. \quad (7.4)$$

При не слишком низкой температуре плазмы величина  $\Delta k$  (шаг перекачки) оказывается малой по сравнению с самим волновым вектором, что позволяет записать ядро  $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  в так называемом дифференциальном приближении [43]. Учтем сначала малость фазовой скорости биений  $\omega_-/|\mathbf{k}_-|$  по сравнению с тепловой скоростью электронов и положим  $\epsilon_e = 1/(k^2 r_D^2)$ . Подставляя в формулу (7.3) явное выражение для  $\epsilon$  и пренебрегая единицей по сравнению с  $\epsilon_e$ , получаем

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{2\pi e^2}{mT} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \text{Im} \Phi(\omega_-; \mathbf{k}_-), \quad (7.5)$$

$$\text{где } \Phi(\omega_-; \mathbf{k}_-) = \left[ 1 + T \int \frac{\mathbf{k}_- \partial f_i / \partial \mathbf{p}}{\omega_- - \mathbf{k}_- \mathbf{v} + i0} d\mathbf{p} \right]^{-1}.$$

\* Сводку формул для вероятностей можно найти, например, в [41].

При максвелловском распределении ионов функция  $\Phi$  зависит только от отношения  $\omega_-/|\mathbf{k}_-|=u$ . Условие дифференциальности спектральной перекачки означает, что масштаб изменения мнимой части  $\Phi$  мал по сравнению с характерным значением фазовой скорости биений. Поскольку к тому же  $\text{Im } \Phi$  — нечетная функция  $u$ , ее можно считать пропорциональной производной от  $\delta$ -функции, т. е.

$$\text{Im } \Phi(u) = A\delta'(u). \quad (7.6)$$

Коэффициент  $A$  определяется из условия

$$A = - \int_{-\infty}^{\infty} u \text{Im } \Phi(u) du.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся тем, что благодаря аналитичности диэлектрической проницаемости (см. [26]) функция  $\Phi(u)$  не имеет особенностей в верхней полуплоскости комплексной переменной  $u$ . Поэтому

$$A = \text{Im} \int_C u [\Phi(u) - 1] du,$$

где контур  $C$  представляет собой полуокружность большого радиуса в верхней полуплоскости. На этом контуре  $\Phi(u) = 1 + T/(Mu^2)$ , т. е.

$$A = \pi T/M. \quad (7.7)$$

Комбинируя соотношения (7.5)–(7.7), находим

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{2\pi^2 e^2}{mM} \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}')^2}{k^2 k'^2} \delta' \left[ \frac{\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}')}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right]. \quad (7.8)$$

Если принять во внимание явный вид закона дисперсии ленгмюровских волн, то аргумент  $\delta'$ -функции можно выразить через разность модулей векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ :

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{\pi}{18} \frac{m}{M} \frac{m}{n} \frac{\omega_p^4}{T^2} (\mathbf{n}\mathbf{n}')^2 |\mathbf{n} - \mathbf{n}'|^2 \delta'(k - k'). \quad (7.9)$$

Здесь  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ ;  $\mathbf{n}' = \mathbf{k}'/k'$ .

Для дальнейшего изложения понадобится также формула для  $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  в аксиально-симметричном случае. Обозначив  $x$  и  $x'$  проекции единичных векторов  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}'$  на выделенное направление и усреднив  $A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$  по азимутальному углу, нетрудно получить, что

$$A_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{\pi}{18} \frac{m}{M} \frac{m}{n} \frac{\omega_p^4}{T^2} T(x; x') \delta'(k - k'), \quad (7.10)$$

где

$$T(x; x') = 1 - x^2 - x'^2 - 3xx' + 3x^2x'^2 + 3x^3x' + 3x'^3x - 5x^3x'^3. \quad (7.11)$$

Из приведенного здесь вывода видно, что в случае неизотермической плазмы под  $T$  в формулах (7.9), (7.10) следует понимать

температуру электронов. При  $T_e \gg T_i$  ядро (7.9) описывает спектральную перекачку ленгмюровских волн за счет процессов распада  $l \rightarrow l + s$ , где символом  $s$  обозначена ионно-звуковая волна. Если уровень звуковых колебаний достаточно высок, то уравнение (7.2) следует уточнить, добавив в него члены, зависящие от интенсивности звука (см. § 11).

Выясним теперь, какова структура стационарных решений уравнения (7.2). Для определенности будем считать при этом, что инкремент  $\Gamma_k$  аксиально симметричен; тогда и функция  $N_k$  зависит только от  $k$  и  $x$ . Условия, определяющие стационарный спектр, имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}(k; x) = 0, \quad N(k; x) \neq 0; \quad (7.12)$$

$$\tilde{\Gamma}(k; x) \leq 0, \quad N(k; x) = 0, \quad (7.13)$$

где

$$\tilde{\Gamma}(k; x) = 2\Gamma(k; x) + \frac{1}{72\pi} \frac{m}{M} \frac{m\omega_p^4}{nT^2} \frac{\partial}{\partial k} \int_{-1}^1 k^2 T(x; x') N(k; x') dx'. \quad (7.14)$$

Соотношение (7.13) представляет собой требование устойчивости спектра.

Следует обратить внимание на то, что интеграл, входящий в формулу (7.14), является многочленом третьего порядка по  $x$  с коэффициентами, зависящими от модуля волнового вектора. Что же касается инкремента неустойчивости  $\Gamma(k; x)$ , то его угловая зависимость, вообще говоря, не имеет такого вида. Поэтому при каждом фиксированном значении  $k$  условие (7.12) может выполняться лишь в отдельных точках  $x_i = x_i(k)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Эти точки образуют на плоскости  $(x; k)$  линии  $x_i(k)$ , называемые далее струями. Ясно, что спектральное распределение колебаний должно быть сосредоточено именно на струях [только здесь обращается в нуль  $\tilde{\Gamma}(k; x)$ ]. Иными словами, функция  $N(k; x)$  может быть записана в следующем виде [44]:

$$N(k; x) = \sum_{i=1}^K N_i(k) \delta[x - x_i(k)], \quad (7.15)$$

где  $x_i(k)$  — форма струи с номером  $i$ , а  $N_i$  — ее интенсивность.

Предположим, что нам известно количество струй  $K$  и их форма. Тогда условия

$$\tilde{\Gamma}[k; x_i(k)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (7.16)$$

дают систему  $K$  обыкновенных дифференциальных уравнений для определения интенсивностей. Поскольку нули функции  $\tilde{\Gamma}(k; x)$  являются одновременно ее максимумами [см. (7.13)], на каждой струе должна быть равна нулю еще и производная  $\partial\tilde{\Gamma}/\partial x$ , т. е.

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}(k, x)}{\partial x} \Big|_{x=x_i(k)} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K. \quad (7.17)$$

Исключение составляют только струи, расположенные на границах интервала изменения  $x$ . Для них знак равенства в формуле (7.17) следует заменить знаком « $\geq$ » при  $x_i(k) = 1$  и знаком « $\leq$ » при  $x_i(k) = -1$ .

Соотношения (7.16), (7.17) вместе с формулой (7.15) образуют замкнутую систему уравнений для определения  $x_i(k)$  и  $N_i(k)$ . Количество струй  $K$  должно быть подобрано таким образом, чтобы обеспечить устойчивость спектра в целом, т. е. выполнение условия (7.13) при всех тех значениях  $x$ , где струи отсутствуют. (Конкретные примеры струйных спектров построены в § 9, 12.)

В соответствии с общим свойством процесса рассеяния струи переносят поток ленгмюровских квантов по спектру в область малых волновых чисел. Найдем величину  $\Pi_k$ , равную средней (по углам) плотности потока квантов через сферу радиусом  $k$  в пространстве волновых векторов. Для этого усредним уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} N(k; x) = \bar{\Gamma}(k; x) N(k; x) \quad (7.18)$$

по углам и введем обозначение

$$\langle N \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 N(k; x) dx.$$

В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle N \rangle + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} k^2 \Pi_k = 2 \langle \Gamma(k; x) N(k; x) \rangle. \quad (7.19)$$

Второе слагаемое в левой части этого соотношения представляет собой дивергенцию плотности потока  $\Pi_k$ , где

$$\Pi_k = - \frac{1}{288\pi} \frac{m}{M} \frac{m}{n} \frac{\omega_p^4}{T^2} k^2 \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dx' T(x; x') N(k; x) N(k; x').$$

Используя формулу (7.15), можно выразить поток через параметры струй.

В стационарном случае в области, где отсутствуют накачка и затухание, поток через любую сферу должен быть одинаковым. Решение уравнения (7.18), отвечающее постоянному потоку, имеет вид

$$N(k; x) = (1/k^2) F(x), \quad (7.20)$$

где  $F(x)$  — произвольная положительная функция  $x$ . Этот спектр, вообще говоря, не является струйным, поскольку для него  $\bar{\Gamma}(k; x)$  равна нулю при всех значениях  $x$ . Вид функции  $F(x)$  определяется условиями сшивки решения (7.20) со спектром, существующим в области возбуждения колебаний.

В заключение этого параграфа рассмотрим вопрос о ширине струй. Для этого включим в правую часть (7.2) источник тепловых шумов  $\varepsilon_k$ . При учете шумов стационарный спектр удовлетворяет уравнению  $N(k; x) \bar{\Gamma}(k; x) + \varepsilon_k = 0$ . Принимая во внимание малость величины  $\varepsilon_k$ , можно утверждать, что в том ме-

сте, где расположена струя, функция  $\hat{\Gamma}(k; x)$  (так же, как и при  $\varepsilon_k=0$ ) должна иметь максимум. Но теперь максимальное значение  $\Gamma$  будет не нулем, а малой отрицательной величиной.

Обозначим положение струи  $\hat{x}(k)$ . Тогда в окрестности точки  $x=\hat{x}(k)$

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(k; x) &= -\alpha_k - \beta_k [x - \hat{x}(k)]^2; \\ \beta_k &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\Gamma}(k; x) \Big|_{x=\hat{x}(k)}. \end{aligned}$$

Соответственно

$$N(k; x) = \varepsilon_k / \{ \alpha_k + \beta_k [x - \hat{x}(k)]^2 \}. \quad (7.21)$$

Коэффициент  $\beta_k$  можно найти, зная функцию  $\tilde{\Gamma}(k; x)$  при  $\varepsilon_k=0$ , т. е. в пределе нулевой ширины струи. Для определения  $\alpha_k$  воспользуемся тем, что в первом приближении по  $\varepsilon_k$  интенсивность струи  $\hat{N}(k)$  должна быть неизменной:

$$\hat{N}(k) = \int_{-1}^1 \frac{\varepsilon_k dx}{\alpha_k + \beta_k [x - \hat{x}(k)]^2} \approx \frac{\pi \varepsilon_k}{(\alpha_k \beta_k)^{1/2}}.$$

Отсюда имеем

$$\alpha_k = \pi^2 \varepsilon_k^2 / (\beta_k \hat{N}^2). \quad (7.22)$$

Из полученных формул видно, что при малых значениях  $\varepsilon_k$  ширина струи, равная  $\varepsilon_k / (\beta_k \hat{N})$ , мала по сравнению с характерным масштабом изменения функции  $\tilde{\Gamma}(k; x)$ . (Изложенные рассуждения относятся только к тем струям, которые расположены не слишком близко к краям промежутка  $[-1; 1]$ .) Заметим, что в реальных условиях причины уширения струи могут быть не только тепловые шумы, но также и нелинейные процессы высших порядков [44]. Более подробно их роль будет рассмотрена в § 11.

## 8. Устойчивость стационарного спектра в задаче об индуцированном рассеянии волн

Продолжим исследование уравнения (7.2). Дискретная система, аналогичная этому уравнению,

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = 2\Gamma_i N_i + N_i \sum_{j=1}^n A_{ij} N_j \quad (8.1)$$

привлекла внимание более полувека назад, когда В. Вольтерра применил ее для описания динамики биологических популяций [45]. Если иметь в виду плазменные приложения, то наряду с интересующей нас задачей о турбулентности, возбуждаемой электронным пучком, к уравнению (7.2) сводится ряд задач о параметрической турбулентности (см., например, [46]). Это уравнение используется также в нелинейной оптике [47].

Дополним уравнение (7.2) источником шумов  $\varepsilon_k$

$$\partial N_k / \partial t = 2\Gamma_k N_k + N_k \int A_{kk'} N_{k'} dk' / (2\pi)^3 + \varepsilon_k \quad (8.2)$$

и, следуя [48], рассмотрим вопрос об установлении его стационарных решений. Конкретный вид ядра  $A_{kk'}$  в данном случае не важен. Существенно лишь то, что при рассеянии сохраняется число квантов. Формальным выражением этого является антисимметрия ядра по отношению к перестановке аргументов  $k$  и  $k'$ :

$$A_{kk'} = -A_{k'k}.$$

Предположим, что стационарное решение существует и обозначим его  $\bar{N}_k$ . Функция  $\bar{N}_k$  удовлетворяет уравнению

$$\bar{N}_k [2\Gamma_k + \int A_{kk'} \bar{N}_{k'} dk' / (2\pi)^3] + \varepsilon_k = 0.$$

Найдем отсюда инкремент неустойчивости  $\Gamma_k$  и подставим  $\Gamma_k$  в уравнение (8.2). В результате получим

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = -\varepsilon_k \frac{N_k - \bar{N}_k}{\bar{N}_k} + N_k \int A_{kk'} (N_{k'} - \bar{N}_{k'}) \frac{dk'}{(2\pi)^3}.$$

Домножим обе части этого соотношения на  $(N_k - \bar{N}_k)/N_k$  и проинтегрируем по  $k$ . Учитывая антисимметрию ядра  $A_{kk'}$ , имеем

$$\frac{\partial I}{\partial t} = - \int \varepsilon_k \frac{(N_k - \bar{N}_k)^2}{N_k \bar{N}_k} \frac{dk}{(2\pi)^3}, \quad (8.3)$$

где

$$I = \int [N_k - \bar{N}_k - \bar{N}_k \bar{\ln} (N_k / \bar{N}_k)] dk / (2\pi)^3. \quad (8.4)$$

Интеграл  $I$  аналогичен функции Вольтерра (см. [45], с. 265), с помощью которой доказывается устойчивость решения системы (8.1) при отрицательно определенной квадратичной форме  $A_{ik} N_i N_k$ . Правая часть равенства (8.3) обращается в нуль только в том случае, когда спектр  $N_k$  совпадает с  $\bar{N}_k$ . Для любого другого распределения волн она меньше нуля, так как  $\varepsilon_k$ ,  $N_k$  и  $\bar{N}_k$  — положительные определенные функции. Таким образом, в нестационарном случае интеграл  $I$  обязательно уменьшается со временем. Заметим теперь, что этот интеграл ограничен снизу, поскольку при любых значениях  $x > 0$  выполняется неравенство  $x - 1 - \ln x \geq 0$ . Из сказанного следует, что при любом начальном условии решение уравнения (8.2) стремится к стационарному (если, разумеется, стационарное состояние вообще существует). Ясно также, что стационарное решение единственно (если бы существовали два решения, то, выбрав одно из них в качестве  $\bar{N}_k$ , а другое в качестве  $N_k$ , получили бы, что  $\partial I / \partial t \neq 0$ ).

Условие (8.3) позволяет получить полезную оценку максимального числа квантов, существующих в системе в каждый момент перехода к стационару. Запишем для этого следующее соотношение:

$$I \equiv N - \bar{N} - \int \bar{N}_k \ln \frac{N_k}{\bar{N}_k} \frac{dk}{(2\pi)^3} \leq I_0, \quad (8.5)$$

где величина  $I_0$  соответствует начальному распределению квантов,

а  $N$  и  $\bar{N}$  — соответственно полное число квантов в момент времени  $t$  и в стационарном состоянии (предполагается, что в стационарном состоянии число квантов конечно). Для интеграла, входящего в формулу (8.5), можно написать следующую цепочку неравенств:

$$\int \bar{N}_k \ln \frac{N_k}{\bar{N}_k} \frac{dk}{(2\pi)^3} \leq \int N_k \left[ \max_k \left( \frac{\bar{N}_k}{N_k} \ln \frac{N_k}{\bar{N}_k} \right) \right] \frac{dk}{(2\pi)^3} \leq \frac{1}{e} \int N_k \frac{dk}{(2\pi)^3} = N/e. \quad (8.6)$$

Комбинируя соотношения (8.5) и (8.6), находим, что

$$N \leq \frac{e}{e-1} (I_0 + \bar{N}).$$

Перейдем теперь к оценке характерного времени релаксации спектра  $\tau$ . Естественно ввести это время следующим образом:

$$\tau = \frac{\int (N_k - \bar{N}_k - \bar{N}_k \ln \bar{N}_k + \bar{N}_k \ln N_k) dk}{\int \varepsilon_k \frac{(N_k - \bar{N}_k)^2}{N_k \bar{N}_k} dk}. \quad (8.7)$$

Простое исследование выражения (8.7) на максимум показывает, что величина  $\tau$  максимальна на заключительной стадии процесса релаксации, когда  $N_k$  и  $\bar{N}_k$  близки друг к другу. Поэтому

$$\tau_{\max} = \frac{\int N_k (N_k/\bar{N}_k - 1)^2 dk}{2 \int \varepsilon_k (N_k/\bar{N}_k - 1)^2 dk} < \frac{1}{2} \max_k \frac{\bar{N}_k}{\varepsilon_k}. \quad (8.8)$$

Как видно из формулы (8.8), при заданной спектральной функции  $\bar{N}_k$  время  $\tau_{\max}$  обратно пропорционально мощности источника шумов. Фактически  $\tau_{\max}$  равно тому времени, в течение которого источник шумов «накачивает» в каждой области  $k$ -пространства столько квантов, сколько их должно быть в стационарном состоянии. Поскольку интенсивность источника шумов, как правило, мала,  $\tau_{\max}$  обычно значительно больше обратного инкремента  $\Gamma_k^{-1}$ . Эта «двухмасштабность» задачи требует соблюдения известной осторожности при численном моделировании установления спектра: время счета должно быть согласовано с величиной  $\tau_{\max}$ . Последнее замечание относится, в частности, к [49], авторы которой ориентировались при расчетах на заниженное время релаксации, полагая это время равным обратной частоте столкновений.

Процесс установления спектра качественно можно представить себе следующим образом. На первой (быстрой) его стадии скорость спектральной перекачки волн за счет рассеяния примерно сравнивается со скоростью генерации и обеспечивается выполнение «грубого» (энергетического) баланса между накачкой и затуханием; при этом в спектре могут наблюдаться значительные (порядка единицы) осцилляции относительно стационарного уровня. На второй, более длительной стадии эти осцилляции постепенно затухают и устанавливается истинно стационарный спектр. Колебательный характер установления спектра отчетливо



виден на простейшем примере двухуровневой системы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_1 &= \gamma N_1 - AN_1 N_2 + \varepsilon_1; \\ \dot{N}_2 &= -\nu N_2 + AN_1 N_2 + \varepsilon_2. \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

Линеаризовав уравнения (8.9) на фоне стационарного решения  $(\bar{N}_1; \bar{N}_2)$ , нетрудно показать, что малые отклонения величин  $N_1$  и  $N_2$  от стационарных значений колеблются с частотой

$$\Omega = -\frac{i}{2} \left( \frac{\varepsilon_1}{\bar{N}_1} + \frac{\varepsilon_2}{\bar{N}_2} \right) + \left[ A^2 \bar{N}_1 \bar{N}_2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_1}{\bar{N}_1} - \frac{\varepsilon_2}{\bar{N}_2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

В отсутствие тепловых шумов ( $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ) эта частота вещественна и движение периодически. Наличие шумов делает колебания затухающими, причем время затухания соответствует оценке (8.8). Отметим еще, что при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  средние во времени значения  $N_1$  и  $N_2$  равны  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$ . Это утверждение, очевидное для малых колебаний, остается верным и для произвольного решения системы (8.9) (см. [45]).

Изложенные в этом параграфе результаты легко распространить на тот случай, когда при рассеянии может происходить трансформация исходных волн в волны другого типа. В качестве примера можно назвать, скажем, рассеяние ленгмюровских волн с трансформацией в электромагнитные (см. рис. 5). Обобщение формулы (8.3) на случай нескольких типов волн ( $N_k^i$ ,  $i=1, 2 \dots$ ) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i I^i = - \sum_i \int e_k^i \frac{(N_k^i - \bar{N}_k^i)^2}{N_k^i \bar{N}_k^i} \frac{dk}{(2\pi)^3}.$$

Значения величины  $I^i$  для каждого сорта волн вводятся по формуле (8.4).

## 9. Релаксация РЭП в режиме рассеяния волн на ионах

**9.1. Качественное рассмотрение.** В задаче о стационарной инжекции РЭП в плазму спектральная перекачка волн за счет их рассеяния на ионах обычно оказывается более быстрым процессом, чем учитываемый квазилинейной теорией вынос волн с групповой скоростью из области релаксации пучка. Увеличение фазовой скорости волн в ходе спектральной перекачки приводит к тому, что волны выходят из резонанса с электронами пучка и, следовательно, перестают усиливаться (рис. 6). Этот механизм ограничения

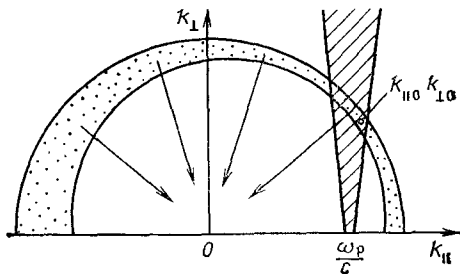


Рис. 6. Стабилизация пучковой неустойчивости вследствие индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на ионах. Штриховкой выделена резонансная область. Стрелками показано направление спектральной перекачки. Точками отмечена область, выделенная законами сохранения при однократном рассеянии волны  $k_{||0}$ ,  $k_{\perp0}$

роста волн впервые рассматривался в [50] в связи с задачей о релаксации нерелятивистского пучка. Для релятивистского пучка соответствующая задача была решена в работах [51, 44], которых мы и будем здесь придерживаться.

Как уже отмечалось в § 7, взаимодействовать друг с другом при рассеянии на ионах могут только волны с близкими по модулю волновыми векторами. Из этого факта и структуры инкремента пучковой неустойчивости следует, что в нелинейном режиме релаксации спектр волн, взаимодействующих с пучком, существенно трехмерный, т. е. в резонансной области, показанной на рис. 6, имеются волны с большими значениями  $k_{\perp}$  ( $k_{\perp} \sim \omega_p/c$ ). Чтобы пояснить это, рассмотрим другую ситуацию: допустим, что спектр резонансных волн близок к одномерному. Это значит, что в области  $k > (\omega_p/c)(1+\varepsilon)$ , где  $\varepsilon \ll 1$ , резонансные волны отсутствуют, а имеются только нерезонансные волны, обеспечивающие стабилизацию неустойчивости. Легко понять, что такое состояние не может быть самоподдерживающимся: в результате рассеяния плазмоны из области  $k > (\omega_p/c)(1+\varepsilon)$  быстро перекачаются в длинноволновую часть спектра, после чего нелинейная стабилизация неустойчивости при  $k > (\omega_p/c)(1+\varepsilon)$  прекратится и пучок возбудит в резонансной области такие волны, у которых  $k_{\perp}$  по порядку равно  $\omega_p/c$ , т. е. спектр станет трехмерным.

При трехмерном спектре резонансных волн диффузия электронов пучка в пространстве импульсов также трехмерная. Поэтому в нелинейном режиме релаксации (в отличие от квазилинейного) должно наблюдаться существенное увеличение углового разброса пучка. Принимая во внимание, что характерное значение  $k_{\perp}$  примерно равно  $\omega_p/c$ , и используя формулу (6.3), нетрудно получить следующую оценку компонент тензора диффузии:

$$D_{pp} \sim D_{p\theta} \sim D_{\theta\theta} \sim \frac{m\omega_p}{n\Delta\theta} U_R, \quad (9.1)$$

где  $U_R$  — плотность энергии резонансных волн. Если разброс электронов пучка по импульсам мал, то по смыслу величины  $D_{\theta\theta}$  можно написать, что

$$c \frac{d}{dz} \Delta\theta^2 \simeq \frac{1}{p_0^2} D_{\theta\theta} \simeq \frac{m\omega_p}{n\Delta\theta p_0^2} U_R. \quad (9.2)$$

Входящую в это соотношение величину  $U_R$  оценим из условия

$$\Gamma \tau_i^{II} \sim 1, \quad (9.3)$$

где  $\Gamma$  — характерное значение инкремента неустойчивости, а  $\tau_i^{II}$  — время спектральной перекачки возбуждаемых пучком волн. Согласно уравнению (7.2) и формуле (7.9)

$$\tau_i^{II} \simeq 10 \omega_p^{-1} \frac{nT}{U_R} \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2}. \quad (9.4)$$

Вычисляя  $\tau_i''$  по энергии резонансных волн, мы предполагаем тем самым, что в резонансной области сосредоточена примерно половина (или еще большая часть) всей энергии, приходящейся на волны с  $k \geq \omega_p/c$ . Именно такая ситуация реализуется в случае струйного спектра турбулентности, что будет подтверждено ниже точным решением задачи о форме спектра.

Оценки (9.3), (9.4) вместе с формулой (2.14) для  $\Gamma$  дают

$$U_R \approx 10 n_b T \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} \frac{mc}{p_0 \Delta \theta^2}. \quad (9.5)$$

Подставив значение  $U_R$  в соотношение (9.2), получим следующее уравнение для углового разброса пучка  $\Delta \theta$ :

$$\frac{d}{dz} \Delta \theta^2 = 10 \frac{\omega_p}{c} \frac{n_b}{n} \frac{M}{m} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{mc}{p_0} \right)^3 \frac{1}{(\Delta \theta)^3}.$$

Отсюда

$$\Delta \theta = (z/l)^{1/5}, \quad (9.6)$$

где

$$l = \frac{1}{20} \frac{c}{\omega_p} \frac{n}{n_b} \frac{m}{M} \left( \frac{mc^2}{T} \right)^2 \left( \frac{p_0}{mc} \right)^3. \quad (9.7)$$

Величину  $l$  естественно назвать длиной релаксации пучка. На расстоянии  $l$  от границы плазмы угловой разброс пучка достигает значения  $\Delta \theta \sim 1$ . На этом же расстоянии пучок теряет основную часть своей энергии. Действительно, поскольку порядок всех трех коэффициентов диффузии одинаков [см. (9.1)], можно утверждать, что относительное уменьшение средней энергии электронов и увеличение углового разброса пучка в процессе релаксации связаны друг с другом соотношением

$$\Delta E/E_0 \sim \Delta \theta = (z/l)^{1/5}. \quad (9.8)$$

Отсюда видно, что «энергетическая» длина пробега пучка в данном случае равна длине рассеяния.

Само собой разумеется, что ввиду оценочного характера формулы (9.7) численному множителю в ней не следует придавать слишком большого значения. Тем не менее он оставлен, поскольку более тщательное рассмотрение (см. ниже) показывает, что коэффициент в формуле для  $l$  близок к 0,05.

Вычислим теперь энергию, которую пучок выделяет в единицу времени в единице объема плазмы:

$$q = \frac{d}{dz} c n_b \Delta E = \frac{n_b c^2 p_0}{5l} \left( \frac{z}{l} \right)^{-4/5}. \quad (9.9)$$

Формально эта величина расходится при малых значениях  $z$ , но надо иметь в виду, что формулы (9.6) и (9.8) применимы только при  $\Delta \theta \geq \Delta \theta_0$ , где  $\Delta \theta_0$  — начальный угловой разброс пучка, т. е. при

$z \geq l(\Delta\theta_0)^5$ . Отсюда видно, что  $q_{max} \approx n_b c^2 p_0 / (5l(\Delta\theta_0)^4)$ . Ширина максимума на кривой  $q(z)$  порядка  $l(\Delta\theta_0)^5$ . На масштабе  $l(\Delta\theta_0)^5$  пучок теряет энергию порядка  $cp_0\Delta\theta_0$  (в расчете на одну частицу). Затем мощность энерговыделения быстро убывает, и основную энергию релятивистские электроны теряют на значительно большем расстоянии (порядка  $l$ ).

Изложенные оценки дают представление лишь о самых грубых свойствах процесса релаксации. Для выявления более тонких деталей требуется не только оценка плотности энергии  $U_R$ , но и знание спектра турбулентности. Для стационарного случая этот спектр удастся найти, но время установления стационарного состояния, как было показано в § 8, довольно велико. Поэтому в реальных условиях спектр может оказаться и нестационарным. Это обстоятельство, однако, не влияет на оценку длины релаксации (9.7), поскольку условие баланса между накачкой колебаний и их стоком в длинноволновую область должно выполняться в среднем по времени даже в отсутствие истинного стационара. Таким образом, формула (9.7) не очень чувствительна к структуре спектра и потому достаточно надежна.

В рассматриваемой схеме релаксации энергия, выделенная пучком, поступает за счет рассеяния в длинноволновую часть спектра, где фазовая скорость превосходит скорость света и отсутствует затухание Ландау. Одним из механизмов диссипации длинных волн может быть их затухание в результате электрон-ионных столкновений. При небольших превышениях инкремента неустойчивости  $\Gamma$  над частотой столкновений  $v_{ei} (\Gamma - v_{ei} \ll v_{ei})$  столкновения способны обеспечить поглощение волн еще до того, как волны при рассеянии попадут в область предельно малых значений  $k$  ( $k \lesssim r_D^{-1} \sqrt{m/M}$ ). Если же  $\Gamma \gg v_{ei}$ , то при  $k \lesssim r_D^{-1} \sqrt{m/M}$  формируется ленгмюровский конденсат, энергия которого в случае столкновительной диссипации связана с энергией резонансных волн соотношением

$$v_{ei} U_0 = \Gamma U_R. \quad (9.10)$$

Наличие конденсата создает благоприятные условия для развития модуляционной неустойчивости [52] и включения дополнительного механизма диссипации, связанного с ленгмювским коллапсом [53]. При этом роль столкновений становится несущественной, а попавшая в конденсат энергия быстро перебрасывается в коротковолновую часть спектра, где поглощается электронами плазмы вследствие затухания Ландау. Максимальная мощность, диссипируемая в результате коллапса, определяется следующей оценкой [54]:

$$P \sim \omega_p U_0 \left( \frac{U_0}{nT} \frac{m}{M} \right)^{1/2}. \quad (9.11)$$

Включив величину  $P$  в левую часть соотношения (9.10) и воспользовавшись формулами (2.14) и (9.5), можно оценить энергию коллапсирующего конденсата. Заметим, что эта оценка подразумевает

малость влияния конденсата на остальные волны (в частности, резонансные). Правомерность такого подхода обоснована в § 11.

Перейдем теперь от оценок к количественному анализу спектров возбуждаемых пучком волн, что позволит получить более полное представление о картине релаксации пучка.

**9.2. Стационарный спектр.** Если ограничиться учетом только одного нелинейного эффекта — индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на ионах, — то задача об отыскании стационарного спектра сводится, как было показано, к соотношениям (7.12), (7.13). В этих соотношениях удобно перейти к безразмерным переменным, сделав следующие замены:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &\rightarrow \Gamma_* \Gamma; & k &\rightarrow \frac{\omega_p}{c} k; \\ N(k, x) &\rightarrow 72\pi \frac{\Gamma_*}{\omega_p} \frac{M}{m} \frac{nT^2}{m\omega_p^4} cN. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Здесь  $\Gamma_*$  — максимальное значение инкремента пучковой неустойчивости; согласно формуле (2.14)

$$\Gamma_* = \alpha\omega_p \frac{n_b}{n} \frac{mc}{p_0} \frac{1}{(\Delta\theta)^2}. \quad (9.13)$$

Чтобы упростить дальнейшие вычисления, будем считать, что колебания возбуждаются двумя одинаковыми пучками, распространяющимися навстречу друг другу. (Если имеется только один пучок, то решение задачи не содержит принципиальных отличий, но требует численного интегрирования уравнений.) Ситуация с двумя пучками реализуется, например, в случае, когда на одном конце установки плазма граничит с вакуумом, а ток ускорителя велик по сравнению с критическим вакуумным током. Встречный пучок при этом возникает вследствие почти полного отражения исходного пучка от вакуумной границы. Если длина плазменного сгустка мала по сравнению с длиной релаксации, то во всем объеме плазмы функции распределения исходного и встречного пучков будут одинаковыми, а инкремент неустойчивости  $\Gamma(k; x)$  — симметричным относительно замены  $x$  на  $-x$ . Естественно считать, что такой же симметрией

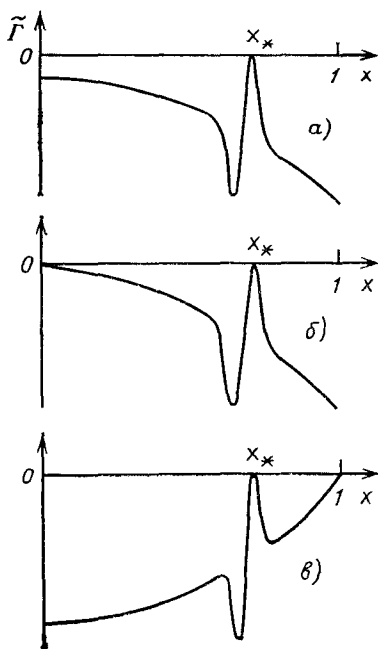


Рис. 7. К определению числа струй. Струям соответствуют нули функции  $\tilde{\Gamma}(x)$

обладает и спектр. Тогда вклад в интеграл (7.14) дает лишь четная по  $x$  часть ядра  $T(x; x')$ , т. е. можно положить

$$T(x; x') = 1 - x^2 - x'^2 + 3x^2x'^2. \quad (9.14)$$

Как было показано в § 7, стационарный спектр в рассматриваемой задаче должен быть струйным. Чтобы найти число струй, рассмотрим поведение полиномиального инкремента  $\tilde{\Gamma}(k; x)$  [см. (7.14)] при некотором фиксированном значении  $k$ . Обратимся для этого к рис. 7, на котором представлены три качественно различные возможности. Узкие выбросы на графиках соответствуют области взаимодействия волн с пучком. Видно, что при  $x \geq 0$  в спектре имеется не более двух струй, одна из которых лежит в резонансной области ( $x = x_*$ ), а вторая (если она вообще существует) либо при  $x = 0$  (рис. 7, б), либо при  $x = 1$  (рис. 7, в). Заметим, что поскольку для пучка с малым разбросом резонансная область очень узка, то точка  $x_*$  на графиках с хорошей точностью совпадает с положением максимума инкремента пучковой неустойчивости  $\Gamma(k; x)$  по  $x$ . Этот максимум находится при  $x_* \approx 1/k$ , причем

$$\Gamma(k; x_*) = 1/k^2 \quad (9.15)$$

[см. формулы (2.14) и (9.12)] Таким образом, все возможные положения струй известны, и остается только найти из уравнения (7.16) интенсивности струй.

Обозначим искомые интенсивности  $N_*$ ,  $N_0$  и  $N_1$ . Тогда формула (7.15) запишется следующим образом:

$$N(k; x) = N_* [\delta(x - 1/k) + \delta(x + 1/k)] + N_0 \delta(x) + N_1 [\delta(x - 1) + \delta(x + 1)]. \quad (9.16)$$

В случае, изображенном на рис. 7, а,  $N_0 = N_1 = 0$ , а  $N_*$  удовлетворяет уравнению [см. (7.16) и (7.14)]

$$1/k^2 + N_* 2k(1 - 1/k^2) + (k^2 - 2 + 3/k^2) \partial N_*/\partial k = 0.$$

Отсюда

$$N_* = \frac{1}{k^2(1 - 2/k^2 + 3/k^4)^{1/2}} \left[ C + \int_k^\infty \frac{dk_1}{k_1^2(1 - 2/k_1^2 + 3/k_1^4)^{1/2}} \right], \quad (9.17)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

В случае рис. 7, б  $N_1 = 0$ , а для  $N_*$  и  $N_0$  из уравнений  $\tilde{\Gamma}(k; 1/k) = 0$  и  $\tilde{\Gamma}(k; 0) = 0$  имеем

$$2(k^2 - 1)N_* + k^2N_0 = \text{const}; \quad N_* = -k/2 + \text{const}. \quad (9.18)$$

Наконец, в случае рис. 7, в

$$(k^2 - 1)N_* = \frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1} + \text{const}; \quad N_* + k^2N_1 = \text{const}. \quad (9.19)$$

Составим теперь из полученных решений стационарный спектр в интервале  $1 \leq k < \infty$ . Заметим прежде всего, что при  $k \rightarrow \infty$  поток квантов по спектру должен обращаться в нуль. Этому требованию удовлетворяет только решение (9.17) с нулевой константой  $C$ . Такое решение, однако, не может быть «протянуто» до точки  $k=1$ , поскольку при близких к единице значениях  $k$  оно неустойчиво. Неустойчивости соответствуют положительные значения функции  $\tilde{\Gamma}(k; x)$ . На

струе, где сосредоточен спектр, эта функция обращается в нуль, а в непосредственной окрестности струи она заведомо отрицательна (из-за быстрого убывания инкремента пучковой неустойчивости). Поэтому достаточно выяснить, какой знак имеет  $\tilde{\Gamma}(k; x)$  вне резонансной области. Здесь  $\tilde{\Gamma}$  монотонно изменяется с изменением  $x^2$ , что позволяет записать условия устойчивости решения (9.17) в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}'(k; 0) &\equiv 2 \frac{\partial}{\partial k} (k^2 - 1) N_* < 0; \\ \tilde{\Gamma}(k; 1) &\equiv 4 \frac{\partial}{\partial k} N_* < 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Первое из этих двух условий более жесткое, чем второе. Действительно, если предположить, что  $\tilde{\Gamma}(k; 1) = 0$ , то из формулы (9.20) получается, что  $\tilde{\Gamma}(k; 0) = 4kN_* > 0$ . Отсюда видно, что значение  $k_*$ , соответствующее границе устойчивости спектра (9.17), следует определять из соотношения  $\tilde{\Gamma}(k_*; 0) = 0$ . Подставляя в это условие явный вид функции  $N_*(k)$ , имеем

$$\frac{k_*^2 - 1}{4k_*} = \frac{1}{(k_*^4 - 2k_*^2 + 3)^{1/2}} \int_{k_*}^{\infty} \frac{dk}{(k^4 - 2k^2 + 3)^{1/2}}.$$

Численное решение этого уравнения дает  $k_* = 1,69$ . Поскольку граница устойчивости отвечает возбуждению струи, расположенной при  $x=0$ , спектр (9.17) надлежит спитть со спектром (9.18). Для последнего же условия устойчивости выполняются автоматически. В итоге получаются следующие формулы для интенсивностей  $N_1$ ,  $N_0$  и  $N_*$ :

$$N_1^* = 0; \quad (9.21)$$

$$N_0 = \begin{cases} 0, & k > k_*; \\ \frac{(k_*^2 - k^2)(k_*^2 - 1)}{2k_*^2 k_*} - \frac{(k_* - k)(k^2 - 1)}{k^2}, & 1 < k < k_*; \end{cases} \quad (9.22)$$

$$N_* = \begin{cases} \frac{1}{(k^4 - 2k^2 + 3)^{1/2}} \int_k^{\infty} \frac{dk_1}{(k_1^4 - 2k_1^2 + 3)^{1/2}}, & k > k_*; \\ \frac{k_* - k}{2} + \frac{k_*^2 - 1}{4k_*}, & 1 < k < k_*. \end{cases} \quad (9.23)$$

В области  $0 < k < 1$ , где инкремент пучковой неустойчивости равен нулю, спектр соответствует постоянному потоку волн в конденсат и определяется формулой (7.20). Чтобы спитть решения в точке  $k=1$ , заметим, что дифференциальное приближение для рассеяния имеет смысл только в том случае, когда вычисленная с его помощью величина  $\tilde{\Gamma}(k; x)$  конечна. Иными словами, моменты углового распределения волн  $\int_{-1}^1 Nx^2 dx$  и  $\int_{-1}^1 N(1-x^2) dx$ , производные от которых входят в функцию  $\tilde{\Gamma}(k; x)$ , не имеют скачков. Приравнивая значения этих вели-

чин слева и справа от точки  $k=1$ , получаем [см. формулы (7.20), (9.16), (9.21)—(9.23)]

$$\int_{-1}^1 F(x) dx = (k_* - 1) \left( \frac{3k_* + 1}{2k_*} \right);$$

$$\int_{-1}^1 F(x) (1 - x^2) dx = (k_*^2 - 1)^2 / (2k_*).$$

Остальные моменты функции  $F(x)$  остаются произвольными. Для их однозначного определения следовало бы учесть малые добавки к величине  $\tilde{\Gamma}(k; x)$ , снимающие вырождение спектра на промежутке  $0 < k < 1$ , или же включить в рассмотрение тепловые шумы. Мы, однако, не будем этого делать, поскольку основной интерес представляет обратное влияние волн на пучок, а оно полностью характеризуется спектром резонансных волн, который определен однозначно.

**9.3. Диффузия электронов пучка.** Для описания эволюции пучка необходимо решить квазилинейное уравнение (6.2), в котором компоненты тензора диффузии определяются спектром (9.23). При этом следует учесть, что в процессе релаксации изменяется инкремент неустойчивости и сам спектр. Аналитически решить такую самосогласованную задачу не удастся, поэтому ограничимся тем, что вычислим коэффициенты диффузии, считая функцию распределения релятивистских электронов заданной. Положим

$$f(\theta, p) = \frac{1}{\pi p_0^2 \Delta \theta^2} \delta(p - p_0) \exp - \frac{\theta^2}{\Delta \theta^2}. \quad (9.24)$$

$f(\theta; p)$  представляет собой функцию распределения только одного пучка. Полная функция распределения есть  $f(\theta; p) + f(\pi - \theta; p)$ .

В случае двух одинаковых пучков коэффициенты  $D_{pp}$  и  $D_{\theta\theta}$  симметричны относительно замены  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ , а коэффициент  $D_{p\theta}$  антисимметричен. Поэтому достаточно рассмотреть интервал  $0 < \theta < \pi/2$ . Учитывая, что основной вклад в тензор диффузии дают колебания, бегущие под большими углами к оси пучка ( $\theta' \gg \theta$ ), а также то, что  $\theta \ll 1$ , можно упростить формулу (6.3) и написать для  $D_{pp}$ ,  $D_{p\theta}$  и  $D_{\theta\theta}$  следующие выражения:

$$\left. \begin{array}{l} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{array} \right\} = D \int_1^\infty \frac{dk}{k} \frac{N_*(k)}{\left[ \theta^2 \left( 1 - \frac{1}{k^2} \right) - \left( x_*(k) - \frac{1}{k} \right)^2 \right]^{1/2}} \left\{ \begin{array}{l} 1; \\ \frac{1 - kx_*(k)}{\theta}; \\ \left( \frac{1 - kx_*(k)}{\theta} \right)^2. \end{array} \right. \quad (9.25)$$

Здесь  $D \equiv (18/\pi) \Gamma_* (T/c)^2 M/m$ , а  $x_*(k)$  — положение струи в резонансной области.

Отметим, что при вычислении величин  $D_{pp}$ ,  $D_{p\theta}$  и  $D_{\theta\theta}$  необходимо знать  $x_*(k)$  с большей точностью, чем при определении интенсивности струи. Точка  $x_*(k)$ , как уже указывалось, совпадает с положением максимума инкремента пучковой



неустойчивости  $\Gamma(k; x)$  по  $x$  при фиксированном значении  $k$ . Вычисление инкремента по формуле (2.13) с учетом (9.24) дает в безразмерных переменных следующий результат:

$$\Gamma(k; x) = \frac{\sqrt{2e}}{k^2} \left( \frac{kx - 1}{\Delta\theta \sqrt{k^2 - 1}} \right) \exp - \frac{(kx - 1)^2}{\Delta\theta^2 (k^2 - 1)}.$$

Максимум этого выражения лежит при  $x = x_*(k) \equiv 1/k + (\Delta\theta/\sqrt{2})\sqrt{1-1/k^2}$ .

С учетом найденного значения  $x_*$  формула (9.25) принимает вид

$$\left. \begin{matrix} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{matrix} \right\} = \frac{D}{\left(\theta^2 - \frac{\Delta\theta^2}{2}\right)^{1/2}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ -\frac{\Delta\theta}{\sqrt{2}\theta} \\ \frac{\Delta\theta^2}{2\theta} \end{matrix} \right\} \int_1^\infty \frac{N_*(k) dk}{(k^2 - 1)^{1/2}} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ (k^2 - 1)^{1/2} \\ (k^2 - 1) \end{matrix} \right\} \quad (9.26)$$

Полученное выражение применимо только при  $\theta > \Delta\theta/\sqrt{2}$ . Диффузия частиц с меньшими значениями  $\theta$  обусловлена колебаниями, бегущими почти вдоль оси пучка ( $\theta' \lesssim \Delta\theta$ ). Простые оценки показывают, что значения коэффициентов диффузии в области  $\theta < \Delta\theta/\sqrt{2}$  малы по сравнению с теми, что дает в области  $\theta \sim \Delta\theta$  формула (9.26). Поэтому можно считать, что при  $\theta < \Delta\theta/\sqrt{2}$  значения  $D_{pp}$ ,  $D_{p\theta}$ ,  $D_{\theta\theta}$  равны нулю.

Зная тензор диффузии, нетрудно с помощью квазилинейного уравнения (6.2) найти скорость изменения средней энергии и углового разброса релятивистских электронов. Для наглядности запишем результат в размерных переменных:

$$\frac{d\langle p \rangle}{dz} = -mc \frac{\omega_p}{c} \frac{n_b}{n} \left( \frac{mc}{p_0} \right)^2 \left( \frac{T}{mc^2} \right)^2 \frac{M}{m} \frac{1}{\Delta\theta^4} I_p; \quad (9.27)$$

$$\frac{d\langle \theta^2 \rangle}{dz} = \frac{\omega_p}{c} \frac{n_b}{n} \left( \frac{mc}{p_0} \right)^3 \left( \frac{T}{mc^2} \right)^2 \frac{M}{m} \frac{1}{\Delta\theta^3} I_\theta. \quad (9.28)$$

$$\text{Здесь } I_p = \frac{18}{e} \int_1^\infty N_*(k) dk \approx 3,45, \quad I_\theta = \frac{36}{\sqrt{2}e} \int_1^\infty N_*(k) (k^2 - 1)^{1/2} dk \approx 8,25.$$

Коэффициенты  $I_p$  и  $I_\theta$  определены численно с использованием формулы (9.23).

Формула (9.28) позволяет оценить длину релаксации пучка более аккуратно, чем это было сделано в разд. 9.1. Положим для оценки  $\langle \theta^2 \rangle = \Delta\theta^2$  и будем рассматривать соотношение (9.28) как уравнение относительно  $\Delta\theta$ . Тогда имеем:  $\Delta\theta = (z/l)^{1/5}$  [см. для сравнения (9.6)]. Значение  $l$  с точностью до численного коэффициента совпадает с введенной ранее длиной релаксации (9.7). Значение численного коэффициента, входящего в  $l$  (так же, как и коэффициента в формуле (9.7)), невелико: оно равно 0,048.

**9.4. Столкновительное затухание и радиационные потери.** Отыскивая в разд. 9.2 спектр возбуждаемой пучком турбулентности, мы получили решение с постоянным потоком плазмонов в конденсат, что подразумевает поглощение волн за счет ленгмюровского коллапса. Выясним теперь, какую роль в энергетическом балансе играют два других фактора: столкновительное

затухание волн и потери на электромагнитное излучение с двойной плазменной частотой. Рассмотрим для этого простую модельную задачу, в которой возбужденные воли считаются изотропным, причем

$$\Gamma(k) = \begin{cases} 0, & k < 1; \\ 1/k^2, & k > 1. \end{cases} \quad (9.29)$$

Такая модель, разумеется, не даст правильного углового распределения волн, но для энергетических оценок это обстоятельство не очень существенно.

Начнем с учета столкновений. Если включить в  $\tilde{\Gamma}(k, x)$  соответствующий декремент затухания, то уравнение для стационарного изотропного спектра примет вид

$$\tilde{\Gamma}(k) \equiv 2\Gamma(k) - \nu + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial k} k^2 N = 0. \quad (9.30)$$

Отсюда

$$N = \begin{cases} 0, & k > (2/\nu)^{1/2}; \\ \frac{3}{4k^2} \int_k^{(2/\nu)^{1/2}} (2\Gamma - \nu) dk, & k < (2/\nu)^{1/2}. \end{cases} \quad (9.31)$$

Если превышение над порогом неустойчивости велико ( $\nu < 1/2$ ), то формула (9.31) применима вплоть до  $k=0$ . В этом случае некоторая часть волн обязательно попадает в конденсат.

Если же надкритичность мала ( $\nu > 1/2$ ), то спектральная плотность волн  $N(k)$ , формально вычисленная согласно (9.31), при  $k < 2(\sqrt{2\nu}-1)$  отрицательна. Это значит, что спектр обрывается в точке  $k=2(\sqrt{2\nu}-1)$ , т. е. волны успевают поглотиться раньше, чем они в результате спектральной перекачки достигнут точки  $k=0$ .

По спектру (9.31) можно найти мощность  $q$ , выделяемую в единице объема плазмы:

$$q = \frac{54}{\pi} \omega_p n T \frac{\Gamma_*^2}{\omega_p^2} \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} \left[ 1 - 2\sqrt{2} \left( \frac{\nu_{ei}}{\Gamma_*} \right)^{1/2} + \frac{3}{2} \frac{\nu_{ei}}{\Gamma_*} + \frac{1}{2} \frac{\nu_{ei}}{\Gamma_*} \ln \frac{2\Gamma_*}{\nu_{ei}} \right]. \quad (9.32)$$

Для удобства эта формула написана в размерных переменных. Здесь  $\Gamma_*$  определяется формулой (9.13). Максимальная мощность нагрева, при которой еще нет стока энергии в конденсат, достигается при  $\Gamma_* = 2\nu_{ei}$  и равна

$$q_\nu = \frac{54}{\pi} \omega_p n T \left( \frac{\nu_{ei}}{\omega_p} \right)^2 \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} (\ln 4 - 1). \quad (9.33)$$

Следует отметить, что в случае сильной надкритичности ( $\nu \rightarrow 0$ ) струйный и изотропный спектры при одном и том же значении  $\Gamma_*$  дают значения  $q$ , различающиеся всего лишь в 1,5 раза. В этом смысле изотропная модель обладает довольно хорошей точностью.

Добавим теперь в уравнение (9.30) слагаемые, описывающие процессы слияния ленгмюровских волн в электромагнитные и рассеяния ленгмюровских волн на электронах. Обозначив эти слагаемые  $\Gamma_{\text{rad}}$  и  $\Gamma_e$ , получим

$$2\Gamma - \nu + \Gamma_e + \Gamma_{\text{rad}} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial k} k^2 N = 0. \quad (9.34)$$

В используемых безразмерных переменных усредненные по углам величины  $\Gamma_e$  и  $\Gamma_{\text{rad}}$  задаются следующими формулами [55]:

$$\Gamma_e = \frac{216}{5(2\pi)^{1/2}} \frac{M}{m} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{3/2} \left[ \int_k^\infty N(k_1) k_1^2 dk_1 \frac{k^2}{k_1^3} (k_1^2 - k^2) \left( \frac{k_1^2}{3} + \frac{4}{7} k^2 \right) - \int_0^k N(k_1) k_1^2 dk_1 \frac{k_1^2}{k^3} (k^2 - k_1^2) \left( \frac{1}{3} k^2 + \frac{4}{7} k_1^2 \right) \right]; \quad (9.35)$$

$$\Gamma_{\text{rad}} = -\frac{3}{4} \frac{M}{m} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^2 \int_{|k-\sqrt{3}|}^{|k+\sqrt{3}|} N(k_1) k_1^2 dk_1 \frac{(k^2 - k_1^2)^2}{kk_1} \times \left[ 1 - \left( \frac{k^2 + k_1^2 - 3}{2kk_1} \right)^2 \right]. \quad (9.36)$$

Если воспользоваться непосредственно формулой (9.36), то окажется упущенным тот факт, что радиационные потери сами по себе не могут привести к нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости. Действительно, слияние резонансных волн друг с другом (в случае, когда имеется всего один пучок) запрещено законами сохранения. Если взять два пучка, то запрет снимается и тогда, казалось бы, слияние волн способно обеспечить существование стационарного спектра. На самом деле, однако, такой стационарный спектр неустойчив: при небольшом увеличении плотности энергии волн, взаимодействующих с одним из пучков, волны, взаимодействующие со вторым пучком, начинают затухать, а это, в свою очередь, приводит к дальнейшему росту волн, возбуждаемых первым пучком. Аналогичная неустойчивость должна наблюдаться и при изотропном возбуждении волн. Отсюда видно, что для сохранения качественного соответствия между изотропной моделью и реальной ситуацией следует изменить формулу (9.36) так, чтобы стабилизация пучковой неустойчивости за счет одного только процесса слияния стала невозможной. С этой целью добавим под знак интеграла (9.36) множитель  $[1 - \theta(k-1)\theta(k_1-1)]$ , выключающий взаимодействие резонансных ( $k > 1$ ) волн друг с другом [функция  $\theta(x)$  равна нулю при  $x < 0$  и единице при  $x > 0$ ]. В итоге получим

$$\Gamma_{\text{rad}} = -\frac{3}{4} \frac{M}{m} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^2 \int_{|k-\sqrt{3}|}^{|k+\sqrt{3}|} N(k_1) k_1^2 dk_1 [1 - \theta(k-1)\theta(k_1-1)] \times \frac{(k^2 - k_1^2)^2}{kk_1} \left[ 1 - \left( \frac{k^2 + k_1^2 - 3}{2kk_1} \right)^2 \right]. \quad (9.37)$$

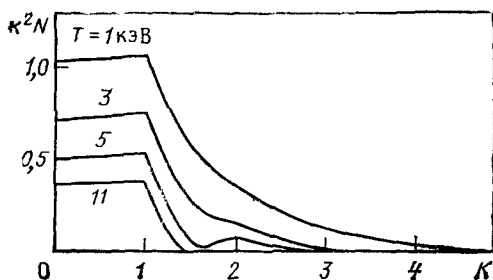


Рис. 8. Результат численного интегрирования уравнения (9.34) при  $\nu=0,02$  и различной температуре плазмы

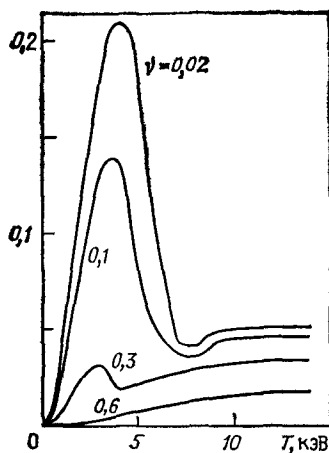


Рис. 9. Зависимость доли радиационных потерь от температуры плазмы и частоты столкновений

Уравнение (9.34), в котором  $\Gamma$ ,  $\Gamma_e$  и  $\Gamma_{\text{гад}}$  определены формулами (9.29), (9.35), (9.37), удастся решить только численно. (Расчеты были выполнены автором совместно с О. П. Соболевым) В получающихся спектрах (рис. 8) интенсивность волн с большими значениями  $k$  заметно ниже, чем в случае, когда рассеяние на электронах «выключено», причем наиболее отчетливо это проявляется при высокой температуре плазмы. Такая тенденция вполне естественна, поскольку величина  $\Gamma_e$  пропорциональна  $T^{5/2}$  и, кроме того, растет с увеличением  $k$ . Подавление коротковолновых колебаний приводит к тому, что энерговклад в плазму растет с ростом температуры несколько медленнее, чем в отсутствие рассеяния на электронах. Излучение выносит из плазмы не более 25% энергии, выделенной пучком (рис. 9). Таким образом, радиационные потери не слишком велики, что объясняется перестройкой спектра в результате рассеяния на электронах. При «выключенном» рассеянии на электронах роль излучения существенно возрастает.

## 10. Накопление электромагнитных волн

Обсуждая нелинейную стабилизацию пучковой неустойчивости, мы до сих пор учитывали только один из двух имеющихся каналов индуцированного рассеяния ленгмюровских волн —  $ll$ -рассеяние (см. рис. 5, а). Включим теперь в рассмотрение также  $lt$ -канал (рис. 5, б), отвечающий трансформации ленгмюровских волн в электромагнитные. Порядок вероятностей  $ll$ - и  $lt$ -процессов одинаков, но при малой оптической толщине плазмы, когда уровень электромагнитных волн низок,  $lt$ -рассеяние подавляется. Именно к этому случаю и относятся изложенные выше результаты. Если же электромагнитные волны с частотами, близкими к  $\omega_p$ , не уходят из плазмы, то  $lt$ -рассеяние, как будет показано, может существенно изменить вид стационарного спектра. Наиболее отчетливо это проявляется при больших превышениях над порогом неустойчивости ( $\Gamma \gg \nu_{ei}$ ), когда равновесие между накачкой и затуханием поддер-

живается не за счёт стока ленгмюровских колебаний в длинноволновую область, а за счёт  $ll$ -рассеяния. Рождающиеся при этом электромагнитные волны затухают в результате столкновений, передавая свою энергию электронам плазмы. В таком режиме энергия электромагнитных волн намного превосходит энергию ленгмюровских и роль  $ll$ -рассеяния оказывается незначительной.

Применительно к аксиально-симметричной задаче система кинетических уравнений для волн с учетом процессов  $ll$ - и  $ll$ -рассеяния на ионах записывается следующим образом [56]:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N^l(\omega; x) = N^l(\omega; x) \left[ \omega^{1/2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^{1/2} \int_{-1}^1 N^l(\omega; x') T(x; x') dx' + \right. \\ \left. + \sum_{\lambda=1,2} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \int_{-1}^1 N_{\lambda}(\omega; x') T_{\lambda}(x; x') dx' + 2\Gamma(\omega; x) - \nu \right]; \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N_{\lambda}(\omega; x) = N_{\lambda}(\omega; x) \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \omega \int_{-1}^1 N^l(\omega; x') T_{\lambda}(x'; x) dx' - \nu \right]; \quad (10.2)$$

Здесь

$$T(x; x') \equiv 1 - x^2 - x'^2 - 3xx' + 3x^2x'^2 + 3xx'^3 + 3x^3x' - 5x'^3x^3; \quad (10.3)$$

$$T_1(x; x') \equiv x^2 + (1/2)x'^2 - (3/2)x^2x'^2; \quad (10.4)$$

$$T_2(x; x') \equiv (1/2)(1 - x^2). \quad (10.5)$$

В уравнениях (10.1), (10.2) переменная  $\omega$  представляет собой безразмерную дисперсионную добавку к плазменной частоте (за единицу частоты выбрана величина  $(3/2)\omega_p T/mc^2$ );  $x$  — косинус угла между волновым вектором и направлением инжекции пучка; безразмерное время  $\tau$  определяется соотношением  $\tau = (3/2)\omega_p \times (T/mc^2)t$ ; инкремент раскачки ленгмюровских волн  $\Gamma$  и частота столкновений  $\nu$  измеряются в тех же единицах, что и  $\omega$ ; индекс  $\lambda$  определяет поляризацию электромагнитной волны; безразмерные спектральные функции  $N^l(\omega; x)$  и  $N_{\lambda}(\omega; x)$  связаны с размерными спектральными плотностями квантов  $N^l(\mathbf{k})$  и  $N_{\lambda}(\mathbf{k})$  следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} N^l(\omega; x) d\omega dx &= \frac{1}{27\pi} \frac{m}{M} \left( \frac{mc^2}{T} \right)^2 \frac{\omega_p}{nT} N^l(\mathbf{k}) k^2 dk dx; \\ N_{\lambda}(\omega; x) d\omega dx &= \frac{1}{27\pi} \frac{m}{M} \left( \frac{mc^2}{T} \right)^2 \frac{\omega_p}{nT} N_{\lambda}(\mathbf{k}) k^2 dk dx. \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

Чтобы получить качественное представление о роли  $ll$ -рассеяния, обратимся к модели изотропного возбуждения волн, т. е. пренебрежем зависимостью  $\Gamma$ ,  $N^l$  и  $N_{\lambda}$  от  $x$ . Положив в уравнениях

(10.1), (10.2)  $N_1 = N_2 = N^l(\omega)/2$ ,  $N^l = N^l(\omega)$  и выполнив интегрирование по  $x'$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N^l = N^l \left[ 2\Gamma - \nu + \frac{4}{3} \omega^{1/2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^{1/2} N^l + \frac{2}{3} \omega \frac{\partial}{\partial \omega} N^l \right]; \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N^l = N^l \left[ -\nu + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega N^l \right]. \quad (10.8)$$

С точностью до обозначений эта система совпадает с приведенной в [55, с. 313] (см. также [57, с. 194]).

Выясним, как меняется характер стационарного решения системы (10.7), (10.8) по мере увеличения инкремента  $\Gamma^*$ . Относительно инкремента предположим для определенности, что он обращается в нуль при малых и больших  $\omega$ , а в промежутке положителен и имеет единственный максимум.

В отсутствие  $lt$ -рассеяния стационарный спектр состоит только из ленгмюровских волн и задается формулой (9.31). В используемых переменных эта формула имеет вид

$$N^l = \begin{cases} 0 & , \quad \omega > \omega_+; \\ \frac{3}{4\omega^{1/2}} \int_{\omega}^{\omega_+} \frac{2\Gamma - \nu}{\omega^{1/2}} d\omega, & \omega < \omega_+, \end{cases} \quad (10.9)$$

где  $\omega_+$  — больший из двух корней уравнения  $\Gamma(\omega) = \nu/2$ . Такой спектр может существовать и при учете  $lt$ -рассеяния. Необходимо только, чтобы он был устойчив относительно возбуждения  $t$ -волн, т. е. чтобы выполнялось неравенство  $\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega N^l - \nu < 0$  [см. (10.8)]

Используя формулу (10.9), получаем отсюда

$$\Gamma^l \equiv \frac{1}{4\omega^{1/2}} \int_{\omega}^{\omega_+} \frac{2\Gamma - \nu}{\omega^{1/2}} d\omega - \Gamma - \frac{\nu}{2} < 0. \quad (10.10)$$

В случае малого превышения над порогом, когда спектр (10.9) обрывается, не достигнув точки  $\omega=0$ , условие устойчивости выполняется. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что величина  $\omega^{1/2}(\Gamma^l + \Gamma)$  отрицательна при  $\omega=0$  и убывает с ростом  $\omega$ . Поэтому отрицательна и величина  $\Gamma^l$ . Если же имеется сток энергии в конденсат, то решение (10.9) становится неустойчивым, так как неравенство (10.10) в этом случае обязательно нарушается при достаточно малых  $\omega$ . Таким образом, при малой надкритичности стационарный спектр состоит из одних лишь ленгмюровских волн, а с увеличением инкремента в спектре обязательно появляются также и электромагнитные волны.

\* Отметим, что в [55, 57], где первоначально рассматривался этот вопрос, по недоразумению сделан ошибочный вывод об отсутствии у системы (10.7), (10.8) стационарных решений с  $N^l \neq 0$ .

В области частот, где величина  $N^t$  отлична от нуля, стационарное решение уравнений (10.7), (10.8) имеет вид:

$$N^t = (3/2) \nu + A/\omega; \quad N^t = -A/\omega + B + 3 \int_{\omega}^{\omega_+} \Gamma d\omega/\omega, \quad (10.11)$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные интегрирования.

В точке, где  $N^t$  обращается в нуль, решение (10.11) должно быть сшито с решением (10.9). Кроме того, функции  $N^t$  и  $N^t$  по своему смыслу положительны при всех значениях  $\omega$ . Определяя из этих двух условий  $A$  и  $B$ , получаем окончательно следующий спектр:

$$\left. \begin{aligned} N^t &= \begin{cases} 0 & , \quad \omega > \omega_+; \\ \frac{3}{4\omega^{1/2}} \int_{\omega}^{\omega_+} \frac{2\Gamma - \nu}{\omega^{1/2}} d\omega, & \omega_* < \omega < \omega_+, \\ (3/2) \nu & , \quad \omega < \omega_*; \end{cases} \\ N^t &= \begin{cases} 0, & , \quad \omega > \omega_*; \\ 3 \int_0^{\omega_*} \Gamma d\omega/\omega & , \quad \omega < \omega_*. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Здесь  $\omega_*$  — корень уравнения  $\int_{\omega}^{\omega_+} \frac{2\Gamma - \nu}{\omega^{1/2}} d\omega = 2\nu\omega^{1/2}$ .

Воспользовавшись формулой (10.12), можно вычислить полную плотность квантов в системе  $N$ :

$$N = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\infty} d\omega (N^t + N^t) = 3 \int_0^{\omega_+} (2\Gamma - \nu) d\omega. \quad (10.13)$$

С точностью до малых поправок порядка  $k^2 r_D^2$  эта величина пропорциональна полной плотности энергии волн  $U = U^t + U^t$ . Для наглядности приведем результат в размерных переменных:

$$U = \frac{27}{\pi} nT \frac{M}{m} \frac{T}{m\omega_p^3} \int_0^{k_+} [2\Gamma(k) - \nu] k dk \quad (10.14)$$

[ $k_+$  — больший корень уравнения  $\Gamma(k) = \nu/2$ ].

Заметим, что для спектра, определяемого формулой (10.12), сток энергии в конденсат отсутствует; энергия, теряемая источником, полностью поглощается в результате кулоновских столкновений. Поэтому мощность, выделяемая в плазме, равна (в размерных переменных)  $\nu_e U$ , причем эта мощность линейно зависит от интенсивности источника  $\Gamma$ . Нетрудно также проверить, что при больших превышениях  $\Gamma$  над  $\nu$  энергия сосредоточена главным образом в электромагнитных колебаниях, а энергия ленгмюровских волн мала.

Все перечисленные здесь особенности характерны не только для изотропной модели, но и для решения исходных кинетических уравнений (10.1), (10.2). Струйное стационарное решение этих уравнений в задаче о возбуждении волн двумя встречными релятивистскими пучками построено в [56]. Полная плотность энергии волн в этом решении равна

$$U = \frac{18}{\pi} \frac{M}{m} nT \frac{T}{mc^2} \frac{\Gamma_*}{\omega_p} \ln\left(\frac{\Gamma_*}{v_{ei}}\right), \quad (10.15)$$

где инкремент  $\Gamma_*$  определяется формулой (9.13), причем  $\Gamma_* \gg v_{ei}$ .

Остановимся теперь на условиях применимости изложенных в этом параграфе результатов.

В исходных уравнениях мы пренебрегли выносом электромагнитных волн из плазмы. Это можно сделать, если время выноса, равное  $L/v_g$  ( $L$  — размер системы,  $v_g$  — групповая скорость волны), превосходит время столкновительного затухания. Групповая скорость электромагнитных волн, возникающих в результате  $lt$ -рассеяния при нагреве плазмы релятивистским пучком, по порядку равна тепловой скорости электронов. Поэтому ограничение на  $L$  имеет вид  $L > \lambda$ , где  $\lambda$  — длина свободного пробега электронов. Это довольно жесткое требование. Более реалистичен случай, когда электромагнитные волны заперты по другой причине (из-за того, что в области, по которой идет пучок, концентрация плазмы несколько ниже, чем снаружи). Для запертия интересующих нас волн необходим перепад концентрации  $\delta n/n$ , по порядку равный  $T/(mc^2)$ . Если такой перепад существует, то ограничение  $L > \lambda$  снимается.

Следующее условие относится к процессу  $tt$ -рассеяния, который также не был включен в исходные уравнения. Влиянием этого процесса можно пренебречь, если

$$\tau^{tt} > v_{ei}^{-1}, \quad (10.16)$$

где  $\tau^{tt}$  — характерное время  $tt$ -рассеяния. Простые оценки показывают, что величина  $\tau^{tt}$  в  $mc^2/T$  раз превосходит время  $lt$ -рассеяния (см. [55], с. 313). С другой стороны, в случае сильной надкритичности ( $\Gamma \gg v_{ei}$ ) время  $lt$ -рассеяния оценочно равно обратному инкременту пучковой неустойчивости. Поэтому неравенство (10.16) дает следующее ограничение на параметры пучка и плазмы:

$$\Gamma/v_{ei} < mc^2/T. \quad (10.17)$$

Не представляет труда, однако, рассмотреть и случай, когда неравенство (10.17) не выполнено. Время жизни электромагнитных волн в такой ситуации определяется не столкновительным затуханием, а стоком этих волн в конденсат в результате  $tt$ -рассеяния.

В этом параграфе мы интересовались только стационарными спектрами. Относительно нестационарной картины необходимо иметь в виду следующее. Если  $lt$ -рассеяние запрещено, то оценка энергии ленгмюровских волн, взаимодействующих с пучком, не очень чувствительна к тому, является ли спектр истинно стационарным, причем в случае сильной надкритичности оба решения (и стационарное, и нестационарное) соответствуют стоку волн в конденсат. При учете  $lt$ -рассеяния положение может быть иным. Как показано в [58], где численно решалась задача с начальными условиями, в неустановившемся режиме учет  $lt$ -рассеяния



приводит лишь к тому, что наряду с ленгмюровскими колебаниями появляются электромагнитные волны, плотность энергии которых по порядку равна плотности энергии ленгмюровских колебаний. В остальной ситуации остается качественно такой же, как и в случае, когда имеется только  $ll$ -взаимодействие. Что же касается стационарного спектра, то на нем, как было показано,  $ll$ -рассеяние сказывается в значительно большей степени. Это расхождение, по всей вероятности, обусловлено тем, что в [58] рассматривались относительно малые промежутки времени (порядка нескольких обратных инкрементов). Можно ожидать, что с увеличением времени счета до нескольких обратных частот столкновений качественное соответствие между численным решением и найденным аналитически стационарным спектром улучшится.

Построенное выше решение позволяет сделать вывод, что  $ll$ -рассеяние (если оно разрешено) стабилизирует пучковую неустойчивость гораздо более эффективно, чем  $ll$ -процесс. Отсюда следует, что при высокой надкритичности длина релаксации пучка  $l$  должна быть больше, чем (9.7). Оценочно величина  $l$  представляет собой отношение потока энергии в пучке к мощности, диссипируемой в единице объема плазмы. При выполнении неравенства (10.17) скорость диссипации равна  $v_{ei}U$ , где  $U$  задается формулой (10.15). Вспоминая, что в процессе релаксации угловой разброс пучка возрастает до  $\Delta\theta \sim 1$ , нетрудно получить для  $l$  следующее выражение:

$$l = \frac{1}{10} \frac{c}{v_{ei}} \frac{m}{M} \left( \frac{p_0 c}{T} \right)^2 \left[ \ln \left( \frac{\omega_p}{v_{ei}} \frac{n_b}{n} \frac{mc}{p_0} \right) \right]^{-1}. \quad (10.18)$$

Важное достоинство рассмотренного режима нагрева состоит в том, что даже при высокой надкритичности ( $\Gamma \gg v_{ei}$ ) вся энергия, выделенная пучком, диссипирует в результате кулоновских столкновений и, следовательно, передается не группе быстрых частиц, а основной массе электронов плазмы.

В заключение укажем, что замедление процесса релаксации при  $ll$ -рассеянии имеет место и при нерелятивистских энергиях пучка. В качестве одного из возможных приложений этого эффекта следует назвать проблему стабилизации пучков, генерирующих в солнечной короне радиовсплески III типа [59].

## 11. Рассеяние ленгмюровских волн на вынужденных флуктуациях плотности

В § 5 уже упоминалось о возможности стабилизации пучковой неустойчивости вследствие упругого рассеяния волн на неоднородностях плотности плазмы, но при этом неоднородности считались заданными извне. Более интересна ситуация, когда возмущения плотности порождаются самими ленгмюровскими волнами, благодаря чему частота упругого рассеяния оказывается зависящей от интенсивности волн. В этом случае упругое рассеяние способно поддерживать динамическое равновесие между накачкой и затуханием, ограничивая тем самым уровень возбуждаемой пучком турбулентности. Из дальнейшего будет видно, что в слаботурбулентном режиме частота упругого рассеяния пропорциональна квадрату, а соответствующий вклад в кинетическое уравнение — кубу энергии волн. Поэтому с увеличением концентрации пучка упругое рассея-

ние в конце концов опережает спектральную перекачку, обусловленную индуцированным рассеянием волн на ионах. Что же касается пучков низкой концентрации, то для них доминирующим эффектом остается спектральная перекачка.

Вывод кинетического уравнения с учетом рассеяния ленгмюровских волн на вынужденных флуктуациях плотности дан в [60, 61]. Процедура вывода наиболее проста в случае неизотермической плазмы ( $T_e \gg T_i$ ), когда результат может быть получен из кинетических уравнений, описывающих распадное взаимодействие ленгмюровских волн с ионно-звуковыми (величины, относящиеся к звуку, помечены индексом  $s$ ):

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = 2\Gamma N_k + \int \omega(\mathbf{k}; \mathbf{k}_1; \boldsymbol{\kappa}) [N_{\boldsymbol{\kappa}}^s (N_{k_1} - N_k) - N_k N_{k_1}] \frac{d\mathbf{k}_1 d\boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^6} + \int \omega(\mathbf{k}_1; \mathbf{k}; \boldsymbol{\kappa}) [N_{\boldsymbol{\kappa}}^s (N_{k_1} - N_k) + N_k N_{k_1}] \frac{d\mathbf{k}_1 d\boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^6}; \quad (11.1)$$

$$\frac{\partial N_{\boldsymbol{\kappa}}^s}{\partial t} = -2\gamma^s N_{\boldsymbol{\kappa}}^s + \int \omega(\mathbf{k}; \mathbf{k}_1; \boldsymbol{\kappa}) [N_{k_1} N_k + N_{\boldsymbol{\kappa}}^s (N_{k_1} - N_k)] \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1}{(2\pi)^6}. \quad (11.2)$$

Конкретное выражение для вероятности распада  $\omega$  приведено в [41]:

$$\omega(\mathbf{k}; \mathbf{k}_1; \boldsymbol{\kappa}) = \frac{8\pi^5 e^2}{m T_e} \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^s \left( \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_1}{k k_1} \right)^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \boldsymbol{\kappa}) \delta(\omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{\boldsymbol{\kappa}}^s). \quad (11.3)$$

Кроме распадов, в исходных уравнениях учтены возбуждение и поглощение волн. Воспользовавшись в уравнении (11.1) малостью частоты звука по сравнению с частотной шириной спектра плазмонов, можно записать это уравнение в следующем виде:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = 2\Gamma N_k + \frac{e^2}{4\pi m M} N_k \int \left( \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_1}{k k_1} \right)^2 N_{k_1} \delta' \left( \frac{\omega_k - \omega_{k_1}}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|} \right) d\mathbf{k}_1 + \frac{e^2}{8\pi m M} \left( \frac{M}{T_e} \right)^{1/2} \int |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \left( \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_1}{k k_1} \right)^2 \times \times (N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1}^s + N_{\mathbf{k}_1-\mathbf{k}}^s) (N_{k_1} - N_k) \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) d\mathbf{k}_1. \quad (11.4)$$

Первый из входящих сюда интегралов совпадает с нелинейным вкладом в уравнение (7.2) и характеризует спектральную перекачку плазмонов, а второй, сохраняющий число плазмонов и их энергию, описывает интересующий нас процесс упругого рассеяния. При не слишком высоком уровне турбулентности уравнение (11.2) позволяет однозначно связать спектр звуковых шумов, ответственных за рассеяние, со спектром ленгмюровских волн:

$$N_{\boldsymbol{\kappa}}^s = \frac{e^2}{16\pi m T_e} \frac{\omega_{\boldsymbol{\kappa}}^s}{\gamma^s} \int \left( \frac{\mathbf{k} \mathbf{k}_1}{k k_1} \right)^2 N_k N_{k_1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \boldsymbol{\kappa}) \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) d\mathbf{k} d\mathbf{k}_1. \quad (11.5)$$

Условием применимости этой формулы является малость обратного времени нелинейного взаимодействия волн по сравнению с

декрементом затухания звука  $\gamma^s$ . Примечательно, что интеграл столкновений, получающийся при подстановке выражения (11.5) в (11.4), сохраняет свою структуру при произвольном отношении температур электронов и ионов. Отношение температур определяет лишь значение численного множителя перед этим интегралом. Общий результат может быть получен путем замены множителя  $\omega^s/\gamma^s$  в формуле (11.5) на  $(T_e/(T_e+T_i))^{3/2}\zeta(T_e/T_i)$ , где  $\zeta(T_e/T_i)$  — безразмерный коэффициент, вычисленный в [60]. При  $T_i \geq T_e$  область применимости такого интеграла столкновений совпадает с областью применимости приближения слабой турбулентности. Если же  $T_i \ll T_e$ , то с увеличением энергии ленгмюровских волн раньше нарушается условие малости нелинейного вклада в затухание звука, что требует перехода от выражения (11.5) к точному решению уравнения (11.2).

Оценки характерных времен спектральной перекачки и упругого рассеяния волн, возбуждаемых релятивистским пучком ( $k \sim \omega_p/c$ ), показывают, что в изотермической плазме ( $\zeta \sim 1$ ) эти времена сравниваются при

$$U/(nT) \sim (T/Mc^2)^{1/2}. \quad (11.6)$$

При более низком уровне турбулентности роль рассеяния сводится лишь к некоторому уширению струйного спектра, описанного в § 9. Формула (11.6) определяет значение  $U$ , при котором ширина струи становится сопоставимой с шириной резонансной области. Поскольку плотность энергии в струе задается оценкой (9.5), струйная форма спектра сохраняется при выполнении следующего неравенства:

$$n_b/n < (p_0/mc) (m/M)^{3/2} (mc^2/T)^{1/2} \Delta\theta^2.$$

В обратном предельном случае имеются две возможности. Если

$$\frac{p_0}{mc} \left(\frac{m}{M}\right)^{3/2} \left(\frac{mc^2}{T}\right)^{1/2} \Delta\theta^2 < \frac{n_b}{n} < \frac{p_0}{mc} \left(\frac{m}{M}\right)^{3/2} \left(\frac{mc^2}{T}\right)^{1/2},$$

то размытие струй вследствие рассеяния играет заметную роль лишь на начальном этапе релаксации пучка, т. е. до того момента, как угловой разброс пучка достигает

$$\Delta\theta \sim \left(\frac{n_b}{n} \frac{mc}{p_0}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{3/4} \left(\frac{T}{mc^2}\right)^{1/4}.$$

Дальнейший ход релаксации с хорошей точностью описывается струйной моделью. Если же

$$n_b/n > (p_0/mc) (m/M)^{3/2} (mc^2/T)^{1/2}, \quad (11.7)$$

то струйная картина вообще теряет смысл, так как в течение всего процесса релаксации скорость спектральной перекачки волн пренебрежимо мала по сравнению со скоростью упругого рассеяния. Этот режим описан в [60]. Его отличительной особенностью является малость энергетических потерь пучка: быстрое рассеяние при-

водит к тому, что пучок сам поглощает основную часть возбуждаемых им волн. Потери в данном случае могут быть связаны лишь со столкновительным затуханием либо с неучтенным в [60] сбросом некоторой части волн в конденсат при индуцированном рассеянии на электронах.

Воспроизведем оценки, позволяющие найти закон изменения углового разброса пучка при его стационарной инжекции в плазму. Выделим для этого в спектре турбулентности изотропную часть  $N$  и анизотропную добавку  $N'$ , которая при  $\Delta\theta \ll 1$  мала по сравнению с  $N$ . Из уравнения (11.4) видно, что в стационарном состоянии

$$N\Gamma \sim N'v_*(N), \quad (11.8)$$

где  $v_*$  — частота рассеяния, определяемая изотропной частью спектра и связанная с плотностью энергии волн следующей формулой:

$$v_* \sim \omega_p \left( \frac{T}{Mc^2} \right)^{1/2} \left( \frac{U}{nT} \frac{mc^2}{T} \right)^2. \quad (11.9)$$

Еще одно соотношение между  $N'$  и  $N$  вытекает из закона сохранения энергии: добавка  $N'$ , отличная от нуля в области взаимодействия волн с пучком, компенсирует рассмотренное в § 5 затухание, отвечающее изотропному спектру. Отсюда следует, что

$$N' \sim N\Delta\theta. \quad (11.10)$$

Формально соотношение (11.10) можно получить из уравнения (11.4) путем усреднения по углам с учетом того, что интеграл столкновений при усреднении обращается в нуль, а средний декремент затухания изотропного спектра равен  $\Gamma\Delta\theta^2$  (см. § 5). Оценки (11.8)—(11.10) позволяют определить плотность энергии волн  $U$  и найти затем коэффициент квазилинейной диффузии электронов пучка

$$D_{\theta\theta} \sim \frac{m\omega_p}{n} U \sim \omega_p \left( \frac{T}{c} \right)^2 \left( \frac{Mc^2}{T} \right)^{1/2} \left( \frac{n_b}{n} \frac{mc}{p_0} \right)^{1/2} \frac{1}{(\Delta\theta)^{3/2}}. \quad (11.11)$$

В эту формулу подставлено конкретное выражение для инкремента неустойчивости  $\Gamma$ . Воспользовавшись теперь соотношением  $\frac{d}{dz} \Delta\theta^2 = \frac{1}{cp_0^2} D_{\theta\theta}$ , получим окончательно, что

$$\Delta\theta = (z/l)^{2/3}, \quad (11.12)$$

где

$$l \sim \frac{c}{\omega_p} \left( \frac{p_0 c}{T} \right)^2 \left( \frac{T}{Mc^2} \right)^{1/2} \left( \frac{n}{n_b} \right)^{1/2} \left( \frac{p_0}{mc} \right)^{1/2}. \quad (11.13)$$

Этот результат подкреплён в [60] точным решением соответствующей задачи.

Формула (11.13) определяет длину релаксации пучка в той области значений  $n_b$ , где выполнено условие (11.7). На границе при-

менимости эта формула сшивается с полученным в § 9 выражением (9.7). Верхняя граница допустимых концентраций пучка определяется величиной, для которой плотность энергии волн достигает порога модуляционной неустойчивости  $U/(nT) \sim k^2 r_D^2 \sim T/(mc^2)$ . На этой границе  $l \sim (c/\omega_p)(p_0 c/T)^2$ . Исследование релаксации более плотных пучков требует выхода за рамки теории слабой турбулентности. Оценки, относящиеся к таким пучкам, можно найти в [62—64].

Формулируя выше условия, при которых становится существенным упругое рассеяние, мы подразумевали, что возмущения плотности плазмы создаются волнами, взаимодействующими с пучком. Имеется, однако, и другой источник возмущений — ленгмюровский конденсат. Вопрос о его влиянии на релаксацию пучка требует выяснения даже при малых значениях  $n_b$ , когда возмущения плотности, порождаемые резонансными волнами, еще не играют заметной роли. Для ответа на этот вопрос необходимо знать механизм диссипации конденсата. Проведем сначала оценки в предположении, что за диссипацию ответствен сверхзвуковой ленгмюровский коллапс, динамика которого подчиняется автомодельному закону [53]

$$\tau_l \sim \frac{1}{\omega_p} \left( \frac{M}{m} \frac{nT}{Q} \right)^{1/2} l^{3/2}. \quad (11.14)$$

Здесь  $Q$  — энергия, запасенная в коллапсирующей каверне;  $l$  — характерный размер каверны, а  $\tau_l$  — время уменьшения этого размера вдвое. Величина  $Q$  связана с начальным размером каверны  $l_0$ :

$$Q \sim nTr_D^2 l_0. \quad (11.15)$$

Число каверн  $N_l$  с размерами от  $l$  до  $2l$ , приходящихся на единицу объема плазмы, определяется диссипируемой в этом объеме мощностью  $q$ :

$$N_l \sim \tau_l q / Q. \quad (11.16)$$

Каждая каверна представляет собой возмущение плотности

$$\delta n_l / n \sim r_D^2 / l^2. \quad (11.17)$$

Сталкиваясь с такими хаотически расположенными возмущениями, плазмоны с волновыми векторами  $k \geq 1/l$  испытывают упругое рассеяние под действием случайной «силы»  $dk/dt = -\partial\omega_p/\partial r$  (см. [65]). Частота рассеяния плазмона на угол порядка единицы задается при этом следующей оценкой:

$$\tilde{\nu}_* \sim \omega_p (\delta n_l / n)^2 N_l l^2 (k^3 r_D^2).$$

Воспользовавшись соотношениями (11.14)—(11.17), получим отсюда

$$\tilde{\nu}_* \sim \omega_p (M/T)^{1/2} q / (nTl_0^{1/2} l^{1/2} k^3). \quad (11.18)$$

Учтем далее, что энергия поступает в конденсат благодаря индуцированному рассеянию волн на ионах. Это позволяет найти по

величине  $q$  плотность энергии ленгмюровских волн с волновыми векторами порядка  $k$  и оценить с помощью формул (11.4), (11.5) собственный вклад этих волн в частоту упругого рассеяния:

$$v_* \sim \omega_p (M/T)^{1/2} q / (n\Gamma k). \quad (11.19)$$

Как видно из оценок (11.18), (11.19), отношение  $\tilde{v}_*/v_*$  всегда мало. Это дает возможность полностью пренебречь рассеянием волн на коллапсирующих кавернах. Сделанный здесь вывод остается справедливым также и в том случае, когда сверхзвуковому коллапсу предшествует дозвуковой [66]. Необходимо, однако, иметь в виду, что зарождающиеся в конденсате каверны с захватываемыми в них плазмонами могут представлять собой лишь часть конденсата. Их доля зависит от того, насколько вероятен переход модуляционной неустойчивости в коллапс. Ситуация здесь остается пока неопределенной. Не исключено, в частности, что конденсат содержит значительное число «лишних» плазмонов, энергия которых  $U_0$  близка к порогу модуляционной неустойчивости, а на этом фоне лишь изредка появляются коллапсирующие каверны. В этом случае средний уровень возмущений плотности, связанных с конденсатом, задается соотношением

$$\delta n/n \sim k_0^2 r_D^2 \sim U_0 / (nT). \quad (11.20)$$

Здесь  $k_0$  — характерное волновое число конденсата. Значения  $U_0$ ,  $k_0$  и  $\delta n/n$  определяются скоростью диссипации конденсата. Если допустить, что вероятность коллапса достаточно мала, то значение  $\delta n/n$  может оказаться столь большим, что конденсат начнет вносить определяющий вклад в упругое рассеяние резонансных волн. Предельная ситуация такого рода, в которой коллапс вообще отсутствует, а за диссипацию ответственны только столкновения, была проанализирована в [29]. Напомним, следуя этой работе, как в данной ситуации можно оценить потери энергии пучка с угловым разбросом порядка единицы. При не слишком высокой частоте электрон-ионных столкновений  $v_{ei}$  неустойчивость пучка стабилизируется за счет рассеяния резонансных волн на возмущениях плотности, удовлетворяющих соотношению (11.20). При этом частота упругого рассеяния

$$\hat{v}_* \sim \omega_p \left( \frac{mc^2}{T} \right)^{3/2} k_0 r_D \left( \frac{\delta n}{n} \right)^2 \sim \omega_p \left( \frac{mc^2}{T} \right)^{3/2} \left( \frac{U_0}{nT} \right)^{5/2} \quad (11.21)$$

должна быть того же порядка, что и инкремент пучковой неустойчивости  $\Gamma$ , так как при  $\tilde{v}_* \ll \Gamma$  рассеяние вообще не оказывает влияния на возбуждение волн, а при  $\tilde{v}_* \gg \Gamma$  оно делает спектр близким к изотропному, что приводит к быстрому затуханию волн на электронах пучка. Условие  $\tilde{v}_* \sim \Gamma$  определяет энергию конденсата, а вместе с ней и диссипируемую мощность

$$q \sim v_{ei} U_0 \sim v_{ei} nT (\Gamma/\omega_p)^{2/5} (T/mc^2)^{3/5}. \quad (11.22)$$

Чтобы найти энергию резонансных волн  $U$ , достаточно приравнять величину  $q$  потоку, поступающему в конденсат благодаря индуцированному рассеянию резонансных волн на ионах. Это дает

$$U \sim nT \left( \frac{v_{ei}}{\omega_p} \right)^{1/2} \left( \frac{M}{m} \right)^{1/2} \left( \frac{\Gamma}{\omega_p} \right)^{1/2} \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{4/2}. \quad (11.23)$$

Выясним теперь, какую долю своей энергии может потерять пучок к моменту окончания релаксации. Для этого следует определить по известному значению  $U$  время изотропизации электронов пучка, а затем, зная диссипируемую мощность (11.22), найти выделенную пучком энергию. Отношение этой энергии к исходной энергии пучка дается выражением

$$\eta \sim (v_{ei}/\Gamma)^{4/2} (\omega_p/v_{ei})^{3/2} (T/mc^2)^{1/2} (m/M)^{1/2}. \quad (11.24)$$

Изложенный подход подразумевает малость величины  $\eta$ , что, как видно из формулы (11.24), оправдано при достаточно малых значениях  $v_{ei}$ . Условие  $\eta \ll 1$  совпадает с условием малости частоты спектральной перекачки волн по сравнению с частотой их упругого рассеяния. Поэтому при  $\eta \sim 1$  конденсат перестает влиять на качественную картину релаксации пучка. Заметим, что оценке (11.24) можно придать несколько более общий смысл, если понимать величину  $v_{ei}$  как обратное время жизни конденсата, связанное не только со столкновительной, но и с любой другой диссипацией. Все факторы, уменьшающие это время, должны, как видно, приводить к росту энергетических потерь пучка.

## 12. Ленгмюровская турбулентность в магнитоактивной плазме

**12.1. Постановка задачи о струйном спектре.** Влияние слабого магнитного поля на спектры турбулентности, возбуждаемой пучком в диапазоне плазменной частоты, связано с изменением закона дисперсии ленгмюровских и электромагнитных волн. Типичный вид соответствующих дисперсионных кривых показан на рис. 10. Верхняя кривая (точнее, та ее часть, где волна почти потенциальна) от-

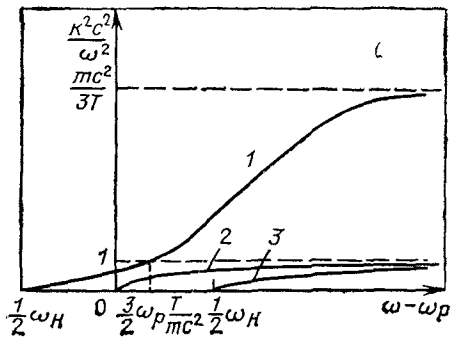


Рис. 10 Дисперсионные кривые высокочастотных электронных колебаний плазмы в слабом магнитном поле при отличном от нуля угле между направлением волнового вектора и магнитного поля:

1 — медленная необыкновенная ветвь; 2 — обыкновенная ветвь; 3 — быстрая необыкновенная ветвь (использована терминология, принятая в [7])

вечает ленгмюровским волнам, а нижние кривые — электромагнитным. Нелинейные эффекты, определяющие стационарный уровень волн, остаются теми же, что и в плазме без магнитного поля. При достаточно малой концентрации пучка главный из этих эффектов — индуцированное рассеяние волн на ионах. Возбуждение, затухание и индуцированное рассеяние волн описываются следующей системой уравнений для чисел заполнения  $N_\lambda(\mathbf{k})$  (индекс  $\lambda$  нумерует дисперсионные ветви):

$$\partial N_\lambda(\mathbf{k})/\partial t = \tilde{\Gamma}_\lambda(\mathbf{k}) N_\lambda(\mathbf{k}); \quad (12.1)$$

$$\tilde{\Gamma}_\lambda(\mathbf{k}) = 2\Gamma_\lambda(\mathbf{k}) + \sum_{\lambda'=1}^3 \int A_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \mathbf{k}') N_{\lambda'}(\mathbf{k}') \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^3}. \quad (12.2)$$

В слабом магнитном поле инкременты пучковой неустойчивости для ветвей 2 и 3 (см. рис. 10) очень малы. Это позволяет считать, что непосредственно пучком возбуждаются только ленгмюровские волны (ветвь 1). При не слишком малом угловом разбросе пучка инкремент для них остается таким же, как в изотропной плазме (см. разд. 4.1). Поэтому в дальнейшем будем полагать  $\Gamma_1 = \Gamma(\mathbf{k}) = -v_{ei}/2$ , где  $\Gamma(\mathbf{k})$  определяется формулой (2.11), а добавочное слагаемое  $-v_{ei}/2$  учитывает столкновительное затухание волн. Для двух других ветвей  $\Gamma_2 = \Gamma_3 = -v_{ei}/2$ .

Ионы, участвующие в процессе рассеяния, обычно можно считать немагнитными, поскольку при выполнении весьма мягкого условия

$$\frac{8\pi n T}{H^2} \gg \frac{m}{M} \left[ 1 + \frac{m}{M} \frac{mc^2}{T} \right]$$

их ларморовский радиус велик по сравнению с характерной длиной волны биений. Это значит, что ядро  $A_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \mathbf{k}')$  в кинетическом уравнении (12.1) отличается от (7.8) только частотами и векторами поляризации волн. Действуя аналогично тому, как это было сделано в § 7, можно показать, что в дифференциальном приближении

$$A_{\lambda\lambda'}(\mathbf{k}; \mathbf{k}') = \frac{2\pi^2 e^2}{mM} |\mathbf{S}(\mathbf{k}; \lambda) \mathbf{S}^*(\mathbf{k}'; \lambda')|^2 \times \delta' \left[ \frac{\omega_\lambda(\mathbf{k}) - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}')}{|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|} \right], \quad (12.3)$$

где  $\mathbf{S}(\mathbf{k}; \lambda)$  — вектор поляризации волны с частотой  $\omega_\lambda(\mathbf{k})$ .

Чтобы в общих чертах представить себе стационарное распределение волн по частотам, вернемся к рис. 10. Область возбуждения волн пучком лежит на рисунке справа от вертикальной штриховой линии. Слева от этой линии расположена зона поглощения. Волны, попавшие сюда благодаря рассеянию, затухают, в результате чего их поток по спектру убывает с уменьшением  $\omega$ . Если в спектре отсутствует конденсат, то при некотором значении  $\omega$ , равном  $\omega_p + \omega_0$ , поток обращается в нуль. Роль магнитного поля, как будет показано, наиболее отчетливо проявляется, когда точка  $\omega_p + \omega_0$  лежит достаточно глубоко в области  $\omega < \omega_p$ , но все же не



слишком близко к минимально возможной частоте, допускаемой законом дисперсии, т. е.

$$(3/2) \omega_p T / (mc^2) \ll |\omega_0| \ll (1/2) \omega_H. \quad (12.4)$$

Соотношение (12.4) означает, что нерезонансный интервал частот существенно растягивается по сравнению со случаем изотропной плазмы. Для этого, разумеется, необходимо выполнение условия

$$\omega_H \gg \omega_p T / (mc^2). \quad (12.5)$$

Если же неравенство (12.5) нарушено, то магнитное поле не может изменить качественные свойства спектров, рассмотренных в § 9 и 10.

Смысл неравенства (12.4) состоит еще и в том, что оно позволяет внести в задачу заметные упрощения, разделив все волны в спектре на два типа:  $l$  (почти потенциальные ленгмюровские) и  $t$  (существенно непотенциальные электромагнитные). При этом для каждого заданного значения  $\omega$  ленгмюровским волнам соответствуют гораздо большие значения волнового вектора, чем электромагнитным. Учитывая малость волновых векторов  $t$ -волн и непотенциальных поправок к векторам поляризации  $l$ -волн, можно опустить в формуле (12.2) соответствующие добавки и, в частности, полностью пренебречь взаимодействием  $t$ -волн друг с другом. Так же, как и в § 10, здесь удобно ввести в качестве независимых переменных величины  $\omega$  и  $x$ , где  $\omega$  — безразмерная дисперсионная добавка к плазменной частоте, измеряемая в единицах  $(3/2)\omega_p T / (mc^2)$  (в этих же единицах измеряются ниже величины  $\Gamma$  и  $v_{ei}$ ), а  $x$  — косинус угла между волновым вектором и направлением магнитного поля. За единицу измерения волнового вектора выберем величину  $\omega_p/c$ . Воспользуемся, кроме того, формулой (10.6) и введем безразмерные спектральные функции  $N_\lambda(\omega; x)$ . Если теперь обозначить  $\Gamma^l$  и  $\Gamma^t$  функции  $\Gamma_\lambda$ , соответствующие  $l$ - и  $t$ -волнам, то для аксиально-симметричного и четного по  $x$  спектра формула (12.2) примет следующий вид [67]:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^l(\omega; x) &= F'_1 + x^2 F'_2 + k^2(\omega; x) [F'_3 + x^2 F'_4] + 2\Gamma(\omega; x) - v_{ei}; \\ \Gamma^t(\omega; x) &= F'_1 + S^2 F'_2 - v_{ei}, \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_1(\omega) &= \int_0^1 k^2(\omega; x) (1 - x^2) N^l(\omega; x) dx; \\ F_2(\omega) &= \int_0^1 k^2(\omega; x) (3x^2 - 1) N^l(\omega; x) dx; \\ F_3(\omega) &= \int_0^1 (1 - x^2) N^l(\omega; x) dx + \omega_0^t(\omega); \\ F_4(\omega) &= \int_0^1 (3x^2 - 1) N^l(\omega; x) dx + 2\omega_1^t(\omega) - \omega_0^t(\omega); \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^t(\omega) &= \sum_{\lambda=1}^3 \int_0^1 (1 - S^2) N_{\lambda}^t(\omega; x) dx; \\ \omega_1^t(\omega) &= \sum_{\lambda=1}^3 \int_0^1 S^2 N_{\lambda}^t(\omega; x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

Здесь  $S(\omega; x)$  — проекция вектора поляризации  $t$ -волны на направление магнитного поля; штрих в формулах (12.6) означает дифференцирование по  $\omega$ . Входящий в формулы (12.6), (12.7) волновой вектор  $l$ -волны  $k(\omega; x)$  связан с  $\omega$  и  $x$  безразмерным дисперсионным уравнением

$$\omega = k^2 + \beta^{-1}(1 - x^2)(1 - k^{-2}), \quad (12.9)$$

где  $\beta \equiv 12\pi nT/H^2$ .

В терминах функций  $\Gamma^l$  и  $\Gamma^t$  условия стационарности и устойчивости спектра аналогичны соотношениям (7.12), (7.13):

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^l(\omega; x) &= 0; & N^l(\omega; x) &\neq 0; \\ \Gamma^l(\omega; x) &\leq 0; & N^l(\omega; x) &= 0; \\ \Gamma^t(\omega; \sigma) &= 0; & \omega_{\sigma}^t(\omega) &\neq 0; \\ \Gamma^t(\omega; \sigma) &\leq 0; & \omega_{\sigma}^t(\omega) &= 0, \quad \sigma = 0; 1. \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Распределение ленгмюровских волн в стационарном спектре представляет собой набор струй [см. (7.15)], а электромагнитные волны описываются функциями  $\omega_{\sigma}^t(\omega)$ , которые могут одновременно отличаться от нуля только в том случае, когда  $\Gamma^t$  не зависит от  $S$ , т. е.  $F_2' \equiv 0$ . Если же  $F_2' \neq 0$ , то в спектре могут присутствовать  $t$ -волны лишь с одним значением  $\sigma$  ( $\sigma=1$  при  $F_2' > 0$  и  $\sigma=0$  при  $F_2' < 0$ ).

Построение стационарного спектра сводится к отысканию для каждого интервала частот различных струйных распределений волн, отбору устойчивых решений и их сшивке друг с другом. С принципиальной стороны эта процедура проста, но соответствующие вычисления весьма громоздки [67]. Поэтому ограничимся здесь тем, что поясним получающиеся результаты с помощью простой модели (разд. 12.2) и оценок (разд. 12.3).

**12.2. Режим  $ll$ -рассеяния.** Предположим, что  $lt$ -рассеяние подавлено за счет быстрого выноса электромагнитных волн из плазмы, и выясним, как в такой ситуации магнитное поле влияет на ленгмюровские волны. Рассмотрим для этого модельную задачу, в которой волновые векторы всех плазмонов считаются перпендикулярными направлению магнитного поля, так что

$$N^l(\omega; x) = N(\omega) \delta(x - 0). \quad (12.11)$$

Модельный инкремент неустойчивости  $\Gamma(\omega; 0)$  выберем равным

лучковому инкременту в резонансной области, т. е. зададим  $\Gamma(\omega; 0)$  следующим образом:

$$\Gamma(\omega; 0) = \begin{cases} \Gamma_*/k^2, & k > 1; \\ 0, & k < 1. \end{cases} \quad (12.12)$$

Здесь  $\Gamma_*$  — отношение инкремента (9.13) к  $(3/2)\omega_p(T/mc^2)$ . Квадрат волнового вектора в формуле (12.12) связан с частотой волны уравнением (12.9), в котором следует положить  $x=0$ :

$$\omega = k^2 + \beta^{-1}(1 - k^{-2}). \quad (12.13)$$

В рамках принятой модели уравнение для спектральной функции  $N(\omega)$  получается из условия  $\Gamma'(\omega; 0) = 0$  [см. (12.6)] и имеет вид

$$2\Gamma(\omega; 0) - v_{ei} + 2k \frac{\partial}{\partial \omega} kN(\omega) = 0. \quad (12.14)$$

Решение уравнения (12.14) удобно с помощью формулы (12.13) выразить через переменную  $k$ :

$$N[\omega(k)] = \begin{cases} 0, & k > k_+; \\ v_{ei} \left( \frac{k_+}{k} - 1 \right)^2 \left[ 1 + \frac{1}{15\beta} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{3}{k^4} + \frac{6}{k^2 k_+} + \frac{4}{k^2 k_+^2} + \frac{2}{k_+^4} \right) \right], & k_+ > k > 1; \\ \frac{N(1)}{k} + v_{ei} \left( 1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{v_{ei}}{3\beta k} \left( \frac{1}{k^3} - 1 \right), & k_0 < k < k_+; \\ 0, & k < k_0. \end{cases} \quad (12.15)$$

Здесь  $N(1) \equiv v_{ei}(k_+ - 1)^2 \left[ 1 + \frac{1}{15\beta} \left( \frac{2}{k_+^4} + \frac{4}{k_+^2} + \frac{6}{k_+} + 3 \right) \right]$ .

Верхняя граница спектра (12.15)  $k_+$  совпадает с точкой обращения в нуль инкремента неустойчивости  $\Gamma - v_{ei}/2$ , т. е.  $k_+ = (2\Gamma_*/v_{ei})^{1/2}$ ; нижняя же граница  $k_0$  определяется из уравнения

$$v_{ei}(1 - k_0) + (v_{ei}/3\beta)(1/k_0^3 - 1) = N(1).$$

Если  $\Gamma_* \gg v_{ei}$ , то

$$k_0 \approx \left[ \frac{v_{ei}}{6\Gamma_*(\beta + 1/5)} \right]^{1/3}. \quad (12.16)$$

В этом предельном случае найденному спектру соответствует (в размерных переменных) следующее выражение для вкладываемой в плазму мощности  $q$ :

$$q = \frac{36}{\pi} \omega_p n T \left( \frac{\Gamma_*}{\omega_p} \right)^2 \frac{T}{mc^2} \frac{M}{m} \left( 1 + \frac{1}{5\beta} \right)^2. \quad (12.17)$$

При  $\beta \gg 1$  значение  $q$  с точностью до численного множителя, возникающего из-за различия в угловом распределении волн, совпадает с найденным в § 9 [см. формулу (9.32)]. Если же  $\beta \ll 1$ , то мощность нагрева возрастает по сравнению со случаем плазмы без магнитного поля в  $1/(25\beta^2)$  раз. Во столько же раз, очевидно, уменьшается длина релаксации пучка  $l$ . Иными словами, вместо формулы (9.7) следует теперь написать, что

$$l = \frac{1}{20} \frac{c}{\omega_p} \frac{n}{n_b} \frac{m}{M} \left( \frac{mc^2}{T} \right)^2 \left( \frac{p_0}{mc} \right)^3 \left[ \frac{60\pi n T}{60\pi n T + H^2} \right]^2. \quad (12.18)$$

Что же касается закона изменения углового и энергетического разброса частиц, то он остается прежним, т. е. определяется формулами (9.6), (9.8). В эти формулы, однако, следует подставлять новое значение  $l$ .

Выигрыш в мощности нагрева при  $\beta \ll 1$  объясняется тем, что магнитное поле уменьшает фазовый объем, в который разрешена спектральная перекачка в элементарном акте рассеяния. В результате нелинейная стабилизация неустойчивости наступает при более высоком уровне турбулентности. Соответственно растет и выделяемая пучком мощность.

Наличие магнитного поля приводит также к тому, что делают-ся более благоприятными условия поглощения нерезонансных волн из-за столкновений: сток энергии в конденсат начинается при большей мощности нагрева, чем в случае изотропной плазмы. Из вида спектра (12.15) формально, казалось бы, следует, что конденсация вообще невозможна, поскольку спектр всегда обрывается, не достигнув точки  $k=0$ . Необходимо, однако, иметь в виду, что при  $k \lesssim (\omega_H/\omega_p)^{1/2}$  становится непригодным дисперсионное соотношение (12.13), которое использовалось при отыскании спектра (12.15). Вывод относительно обрыва спектра справедлив поэтому только при  $k_0 \gtrsim (\omega_H/\omega_p)^{1/2}$ . Отсюда с учетом формул (12.16) и (12.17) легко получается оценка пороговой мощности  $q_v$ , при которой в спектре возникает конденсат:

$$q_v = \frac{1}{9\pi} \omega_p n T \left( \frac{v_{ei}}{\omega_p} \right)^2 \frac{M}{m} \frac{\omega_H}{\omega_p} \frac{mc^2}{T}.$$

Вспомня, что в отсутствие магнитного поля  $q_v$  задается выражением (9.33), можно написать для этой величины простую интерполяционную формулу:

$$q_v = 6\omega_p n T \left( \frac{v_{ei}}{\omega_p} \right)^2 \frac{M}{m} \left( \frac{T}{mc^2} + \frac{1}{54\pi} \frac{\omega_H}{\omega_p} \frac{mc^2}{T} \right). \quad (12.19)$$

Наиболее жесткое условие применимости изложенных в этом разделе результатов связано с необходимостью учета рассмотренного в § 11 упругого рассеяния волн на возмущениях плотности. Обратившись к соотношениям (11.4) и (11.5), нетрудно показать, что, несмотря на изменение закона дисперсии волн, условие, при котором время упругого рассеяния плазмонов с  $k \sim \omega_p/c$  становит-

ся сопоставимым со временем спектральной перекачки, сохраняет вид (11.6). Соответствующее значение концентрации пучка определяется оценкой

$$n_b \sim n \frac{\rho_0}{mc} \left( \frac{m}{M} \right)^{3/2} \left( \frac{mc^2}{T} \right)^{1/2} (\Delta\theta)^2 \frac{\beta^2}{1 + \beta^2}, \quad (12.20)$$

из которой видно, что при  $\beta \ll 1$  область допустимых концентраций существенно сужается по сравнению со случаем плазмы без магнитного поля. Релаксация пучков с концентрацией, превышающей величину (12.20), рассмотрена в § 14.

**12.3. *lt*-Рассеяние.** Оценивая роль *lt*-рассеяния, будем считать выполненными неравенства (12.4). При этом полная частотная ширина спектра, безразмерное значение которой будем обозначать  $\omega_0$ , велика по сравнению с шириной области возбуждения волн, равной в безразмерных переменных  $1 + 1/\beta$  [см. (12.9)].

Обозначим число *l*-волн в единице объема плазмы  $N^l$ , а число *t*-волн —  $N^t$ :

$$N^l = 4\pi \int d\omega \int_0^1 N^l(\omega; x) dx; \quad N^t = 4\pi \int d\omega (\omega_0^t + \omega^t).$$

Через эти величины нетрудно выразить характерные времена *lt*-, *ll*- и *tl*-процессов в нерезонансной области [см. формулы (12.6) — (12.8)]:  $\tau^{ll} \sim \tau^{tl} \sim \omega_0^2 / (k^2 N^l)$ ;  $\tau^{lt} \sim \omega_0^2 / (k^2 N^t)$ . Здесь  $k$  — характерное значение волнового вектора нерезонансных *l*-волн, равное  $|\beta\omega_0|^{-1/2}$  [см. (12.9)].

В стационарном состоянии каждая из величин  $\tau^{ll}$ ,  $\tau^{tl}$  и  $\tau^{lt}$  должна быть равна времени затухания волн  $\nu_{ei}^{-1}$ . Отсюда следует, что

$$N^l \sim N^t \sim \nu_{ei} \beta |\omega_0|^3. \quad (12.21)$$

С другой стороны, характерное время возбуждения *l*-волн должно быть равно времени их откачки из резонансной области в результате рассеяния  $\tau_R$ . Если предположить, что откачка обусловлена в основном *lt*-рассеянием, то для оценки  $\tau_R$  необходимо задать число *t*-волн в резонансном диапазоне частот.

Примем, что на единичный интервал частоты здесь приходится столько же *t*-волн, сколько и в остальной части спектра, а именно  $N^t / |\omega_0|$ . Это подтверждается точным решением задачи [67]. Учитывая, что резонансная область имеет ширину  $1 + \beta^{-1}$ , а волновой вектор в ней порядка единицы, имеем

$$\tau_R \sim (\omega_0 / N^t) (1 + \beta) / \beta.$$

Обратное время откачки  $\tau_R^{-1}$ , очевидно, совпадает с инкрементом пучковой неустойчивости  $\Gamma$ , т. е.

$$N^t \sim \Gamma |\omega_0| (1 + \beta) / \beta. \quad (12.22)$$

Объединяя соотношения (12.21) и (12.22), находим

$$N^l \sim N^t \sim \Gamma^{3/2} (1 + \beta)^{3/2} / (\nu_{ei}^{1/2} \beta^2); \quad (12.23)$$

$$\omega_0 \sim \Gamma^{1/2} (1 + \beta)^{1/2} / (v_{ei}^{1/2} \beta). \quad (12.24)$$

Оценим теперь мощность нагрева плазмы  $q$  и число  $l$ -волн, взаимодействующих с пучком  $N_R^l$ . Мощность, диссипируемая за счет столкновений, отличается от полной энергии волн только множителем  $v_{ei}$ , т. е. в безразмерных переменных

$$q \sim v_{ei}^{1/2} \Gamma^{3/2} \beta^{-2} (1 + \beta)^{3/2}. \quad (12.25)$$

В стационарном состоянии эта величина равна мощности, которую теряет пучок. Последняя же с точностью до численного множителя равна  $\Gamma N_R^l$ . Поэтому

$$N_R^l \sim v_{ei}^{1/2} \Gamma^{1/2} \beta^{-2} (1 - \beta)^{3/2}.$$

Отметим, что при  $\Gamma \gg v_{ei}$  спектральная плотность  $l$ -волн в резонансной области мала по сравнению с их средней спектральной плотностью  $N^l / |\omega_0|$ .

Из формулы (12.25) видно, что эффективность нагрева плазмы растет с увеличением магнитного поля, но зависимость  $q$  от  $H$  оказывается иной, чем в отсутствие  $lt$ -рассеяния: при  $\beta \gg 1$  мощность пропорциональна первой степени напряженности поля, а при  $\beta \ll 1$  — четвертой. Чтобы показать, как зависит мощность от остальных параметров, перепишем формулу (12.25) в размерных переменных:

$$q \sim v_{ei} n T \frac{\Gamma_*}{\omega_p} \frac{M}{m} \frac{T}{mc^2} \left( \frac{\Gamma_*}{v_{ei}} \right)^{1/2} \frac{(1 + \beta)^{3/2}}{\beta^2}. \quad (12.26)$$

Критерий применимости формулы (12.26) дается неравенством (12.4). Подставляя в него явное выражение для  $\omega_0$ , получаем:

$$(1 + \beta)^2 \ll (\Gamma_* / v_{ei}) (1 + \beta) \ll \Omega^2 \beta^2, \quad (12.27)$$

где  $|\Omega| \equiv (mc^2 / 3T) \omega_H / \omega_p$ . Напомним, что согласно условию (12.5)  $|\Omega| \gg 1$ . Левое из неравенств (12.27) эквивалентно соотношению  $q \gg q_0$ , где  $q_0$  — мощность нагрева при  $lt$ -стабилизации пучковой неустойчивости в плазме без магнитного поля. Если это неравенство не выполнено, то вкладываемая в плазму мощность близка к  $q_0$ , а добавка, связанная с магнитным полем, мала. Если же нарушается правое неравенство, то ширина спектра, формально найденная из (12.24), больше  $|\Omega|$ , а это значит, что возникает сток энергии в точку  $\omega = \Omega$ . Максимальная мощность нагрева, при которой сток еще отсутствует, равна

$$q_v \sim \frac{v^2}{\omega_p} n T \frac{M}{m} \frac{\omega_H}{\omega_p} \frac{mc^2}{T}.$$

Она в  $\Omega$  раз больше критического значения  $q_0$ , при котором начинается конденсация  $t$ -волн в плазме без магнитного поля.

### 13. Взаимодействие пучка с геликонами

Наличие в плазме магнитного поля изменяет картину релаксации пучка не только в результате перестройки спектров ленгмюровских и электромагнитных волн, но также и по другой причине: в плазме с магнитным полем пучок начинает возбуждать новые волны. Особенно существенна в этом смысле раскачка геликонов, которая при определенных условиях вообще может стать главной причиной релаксации пучка [68]. Дело в том, что нелинейные процессы с участием геликонов протекают сравнительно медленно и уровень этих волн (в отличие от уровня ленгмюровских) фактически ограничивается одними лишь квазилинейными эффектами. Поэтому геликоны, несмотря на малость соответствующего им линейного инкремента, могут оказывать более сильное обратное влияние на пучок, чем ленгмюровские волны. Учитывая сказанное, поступим далее следующим образом: сначала рассмотрим взаимодействие пучка с геликонами, полностью пренебрегая всеми остальными волнами, а затем уточним условия применимости такого подхода.

**13.1. Качественное рассмотрение.** Геликоны возбуждаются пучком за счет циклотронных резонансов на аномальном эффекте Доплера  $\omega - k_{\parallel} v \cos \theta - n\omega_H/\gamma = 0$ . Напомним, что условие резонанса вытекает из законов сохранения энергии и импульса в элементарном акте излучения волны частицей. При этом  $\hbar\omega$  есть энергия излучаемой волны, а  $\hbar n\omega_H/\gamma$  — изменение «поперечной» энергии частицы. Как уже отмечалось в разд. 3.2, в случае взаимодействия РЭП с геликонами отношение величин  $\omega$  и  $\omega_H/\gamma$  очень мало. Таким образом, «поперечная» энергия частиц изменяется гораздо больше, чем их полная энергия, а это значит, что электроны претерпевают почти упругое рассеяние. Иными словами, процесс релаксации сводится в основном к увеличению углового разброса пучка  $\Delta\theta$ .

Чтобы найти закон изменения  $\Delta\theta$  при стационарной инжекции пучка в плазму, оценим расстояние от границы плазмы, на котором плотность энергии волн, возбуждаемых пучком с заданным разбросом, достигает уровня, существенно превышающего тепловой:  $z \sim \Lambda v_g/\Gamma$ . Здесь  $\Lambda$  — кулоновский логарифм;  $v_g$  — продольная составляющая групповой скорости волны;  $\Gamma$  — инкремент неустойчивости. Для  $\Gamma$ , в свою очередь, справедлива оценка

$$\Gamma \sim k_{\perp} c (n_b/n) (1/\Delta\theta^2), \quad (13.1)$$

которая непосредственно следует из формулы (4.8). Учитывая, что групповая скорость геликона равна

$$v_g = c \frac{|\omega_H|}{\omega_p} \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \frac{kc}{\omega_p} \left( 1 + \frac{k_{\parallel}^2}{k^2} \right), \quad (13.2)$$

получаем:

$$z \sim \Lambda \frac{c}{\omega_p} \frac{n}{n_b} \frac{|\omega_H|}{\omega_p} \Delta\theta^2.$$

В квазилинейном приближении это соотношение можно рассматривать как зависимость углового разброса пучка от координаты  $z$ , т. е.

$$\Delta\theta(z) \sim (z/l_h)^{1/2}, \quad (13.3)$$

где

$$l_h \equiv \Lambda \frac{c}{\omega_p} \frac{|\omega_H|}{\omega_p} \frac{n}{n_b} \quad (13.4)$$

— длина релаксации пучка\*.

Оценим теперь плотность энергии волн  $U^h(z)$ . Для этого удобно воспользоваться законом сохранения импульса. Суммарный поток импульса частиц и волн на расстоянии  $z$  от границы должен быть равен потоку импульса электронов пучка на входе в плазму  $n_b v_0 p_0$ . Рассеиваясь на волнах, электроны теряют поток импульса  $\mathcal{P}$ , равный  $n_b v_0 p_0 \Delta\theta^2$ . С другой стороны,

$$\mathcal{P} = v_g \frac{k_{\parallel}}{\omega} U^h,$$

где под  $v_g$ ,  $k_{\parallel}$  и  $\omega$  следует понимать их характерные значения в спектре. У геликонов порядок фазовой и групповой скоростей одинаков. Поэтому оценочно поток  $\mathcal{P}$  можно считать равным плотности энергии  $U^h$ . Отсюда видно, что

$$U^h(z) \sim n_b v_0 p_0 \Delta\theta^2(z) \sim n_b v_0 p_0 z / l_h. \quad (13.5)$$

При  $z \sim l_h$  плотность энергии волн становится сопоставимой с плотностью энергии пучка. Доля волн в полном потоке энергии при этом весьма мала ( $\sim v_g/c$ ). Столь же малы и относительные потери энергии частиц:

$$\frac{\Delta E}{E} \sim \frac{v_g}{c} \sim \frac{m v_0}{p_0} \left( \frac{\omega_H}{\omega_p} \right)^2 \ll 1 \quad (13.6)$$

(здесь учтено, что при  $\theta \sim 1$  пучок возбуждает колебания с волновым вектором  $k \sim \omega_H m / p_0$ ).

Чтобы выяснить условия применимости квазилинейного приближения, необходимо оценить характерные времена нелинейных взаимодействий геликонов. Сравнение вероятностей различных нелинейных процессов показывает [69], что наиболее быстрый из них — это распад геликонов:  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ ;  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ . Обратное время распада  $\tau_{h \rightarrow h+h}^{-1}$  по порядку равно  $\omega U^h / H^2$ . Воспользовавшись оценкой (13.5), нетрудно проверить, что  $\tau_{h \rightarrow h+h}^{-1} \ll \Gamma$  и становится сопоставимым с  $\Gamma$  только при  $\Delta\theta \sim 1$ . Таким образом, квазилинейная теория пригодна для описания практически всего процесса релаксации, за исключением лишь самой последней его стадии.

\* Формула (13.3) справедлива при  $\Delta\theta \geq \Delta\theta_0$ , где  $\Delta\theta_0$  — угловой разброс пучка на входе в плазму.



**13.2. Решение квазилинейной задачи.** Квазилинейная задача о стационарной инжекции пучка в плоский слой плазмы  $0 < z < L$  сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k_{\parallel}} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial z} = 2\Gamma N_{\mathbf{k}}; \quad (13.7)$$

$$v \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^3 \left( D_{pp} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p} D_{p\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{p \sin \theta} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left( D_{p\theta} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{1}{p} D_{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (13.8)$$

Здесь частота волны  $\omega$  и инкремент  $\Gamma$  задаются соответственно формулами (3.7) и (4.7), а компоненты тензора диффузии имеют вид\*:

$$\begin{pmatrix} D_{pp} \\ D_{p\theta} \\ D_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dk \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{\cos \theta - k_{\parallel} v / \omega}{\sin \theta} \\ \left( \frac{\cos \theta - k_{\parallel} v / \omega}{\sin \theta} \right)^2 \end{bmatrix} \times \\ \times \frac{4\pi^2 e^2 \omega_p^2 \omega^4}{k^4 c^4 |\omega_H|} \left| \frac{k}{k_{\parallel}} \right| Q_n N_{\mathbf{k}} \delta \left( \omega - k_{\parallel} v \cos \theta - n \frac{\omega_H}{\gamma} \right), \quad (13.9)$$

где

$$Q_n \equiv \left[ \left( \frac{n\omega_H}{k_{\perp} v \gamma} + \frac{\omega}{k_{\perp} v} \frac{k^2 c^2}{\omega_p^2} \right) \left| \frac{k}{k_{\parallel}} \right| J_n - \sin \theta J_n' \right]^2. \quad (13.10)$$

Входящая в уравнения (13.7), (13.8) спектральная функция  $N_{\mathbf{k}}$  связана с плотностью энергии геликонов  $U^h$  соотношением

$$U^h = \int \omega N_{\mathbf{k}} dk.$$

Как видно из формулы (13.9), в интересующем нас случае ( $\omega \ll k_{\parallel} v$ ) коэффициенты  $D_{pp}$  и  $D_{p\theta}$  малы по сравнению с  $D_{\theta\theta}$ :

$$\frac{D_{pp}}{D_{\theta\theta}} \ll \left( \frac{\omega}{k_{\parallel} v} \right)^2 \ll 1; \quad \frac{D_{p\theta}}{D_{\theta\theta}} \ll \frac{\omega}{k_{\parallel} v} \ll 1,$$

так что угловой разброс пучка в процессе релаксации должен расти гораздо быстрее, чем разброс по модулю импульса. Предположим для простоты, что на входе в плазму пучок моноэнергетичен, т. е.

$$f(p; \theta; z) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta(p - p_0)}{p_0^2} \Phi_0(\theta).$$

Тогда можно считать, что импульсы электронов и дальше остаются практически равными  $p_0$ , и свести задачу к отысканию только углового распределения частиц

\* Общий вид квазилинейных уравнений для магнитоактивной плазмы получен в [70].

$\Phi(\theta)$ . Уравнение для  $\Phi$  получается путем интегрирования (13.8) по  $\rho$  с учетом малости величины  $D_{\rho\rho}$ ,  $D_{\rho\theta}$  и  $\Delta\rho/\rho_0$ :

$$v_0 \cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta D_{\theta\theta} \Big|_{\rho=\rho_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (13.11)$$

Это уравнение следует дополнить уравнением для волны (13.7), в котором инкремент  $\Gamma$  с точностью до членов порядка  $\omega/(k_{\parallel} v)$  выражается через функцию  $\Phi$ :

$$\Gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{n_b}{n} \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} \frac{kv_0}{(1+k^2 c^2/\omega^2)^2} \times \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} d\theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left[ \frac{nm\omega_H}{k_{\perp} \rho_0} J_n - \left| \frac{k_{\parallel}}{k} \right| \sin \theta J'_n \right]^2 \delta \left( \frac{k_{\parallel} \rho_0 \cos \theta}{m\omega_H} + n \right).$$

В системе уравнений (13.7), (13.11) для сокращения записи удобно перейти от размерных переменных  $z$ ,  $k_{\parallel}$ ,  $k_{\perp}$ ,  $N_k$  к безразмерным  $x$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $N$ :

$$z = \frac{1}{\pi} \frac{n}{n_b} \left| \frac{\omega_H}{\omega_p} \right| \frac{c}{v_0} \frac{c}{\omega_p} x; \\ k_{\parallel} = \frac{|\omega_H| m}{\rho_0} \xi; \quad k_{\perp} = \frac{|\omega_H| m}{\rho_0} \eta; \\ N_k = \frac{1}{2\pi} n_b m c^2 \left( \frac{\rho_0}{mc} \right)^6 \left( \frac{\omega_p}{\omega_H} \right)^6 \frac{c^3}{\omega_p^4} N.$$

После такого перехода система принимает следующий вид:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{n^2 Q_n}{2n^2 + \eta^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \delta(n - \xi \cos \theta) d\theta; \quad (13.12)$$

$$\cos \theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta D \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \quad (13.13)$$

где

$$D = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d\xi \eta d\eta \frac{|n^3| Q_n}{(n^2 + \eta^2 \cos^2 \theta)^{1/2}} \frac{N}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \delta(n - \xi \cos \theta); \\ Q_n \equiv \left[ \left( 1 + \frac{\eta^2 \cos^2 \theta}{n^2} \right)^{1/2} \frac{n}{\eta} J_n(\eta \sin \theta) - \sin \theta J'_n(\eta \sin \theta) \right]^2.$$

Здесь опущены все малые добавки порядка  $\omega/(k_{\parallel} v)$  и, кроме того, учтено, что характерные значения волнового вектора возбуждаемых колебаний малы по сравнению с  $\omega_p/c$ .

Найдем решение системы (13.12), (13.13) для случая, когда толщина слоя плазмы  $L$  намного меньше длины релаксации  $l$ . Границы слоя будем считать поглощающими. В тонком ( $L \ll l$ ) слое угловой разброс пучка  $\Delta\theta$  остается малым по сравнению с единицей. Заметим, однако, что при этом разброс может стать существенно больше своего начального значения  $\Delta\theta_0$ .

Сделаем подтверждающееся результатом предположение о том, что при

$\Delta\theta \ll 1$  основной вклад в правые части уравнений (13.12), (13.13) дают члены с  $n=1$ . Это позволяет привести исходную систему уравнений к виду

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -N \frac{Q_1}{2 + \eta^2} \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}; \quad (13.14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\theta} \int_0^\infty \frac{Q_1 N}{(1 + \eta^2)^{1/2}} \eta d\eta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (13.15)$$

Здесь  $N$  — функция переменных  $\theta, \eta, x$ , причём

$$N(\theta; \eta; x) \equiv N(\xi; \eta; x) \Big|_{\xi=1/\cos \theta}.$$

Идея решения системы (13.14), (13.15) состоит в использовании большого параметра  $\Lambda$ , равного логарифму отношения плотности энергии возбуждаемых волн к плотности энергии тепловых шумов (см. [33, 34]). Как видно из уравнения (13.14),

$$N = N_T \exp \left[ - \left( \frac{Q_1}{2 + \eta^2} \int_0^x \frac{1}{\theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} dx \right) \right],$$

где  $N_T$  — спектральная плотность тепловых шумов. Поскольку интеграл, стоящий в показателе экспоненты, очень велик, величина  $N$  как функция  $\eta$  имеет острый максимум в точке  $\eta = \eta_m$ , отвечающей максимуму функции  $Q_1/(2 + \eta^2)$ . Таким образом, можно с хорошей точностью положить

$$N(\theta; \eta; x) = \psi(\theta; x) \delta(\eta - \eta_m(\theta)). \quad (13.16)$$

При  $\theta \ll 1$   $\eta_m$  легко определяется аналитически:

$$\eta_m = 4^{1/2} \theta^{-2/3}. \quad (13.17)$$

Подчеркнем, что волны, возбуждаемые в процессе релаксации, распространяются под большими углами к оси пучка. Если вместо электронного пучка взять ионный, то положение меняется: спектр волн на начальной стадии релаксации оказывается близким к одномерному (см. [71]).

Подставив формулы (13.16), (13.17) в уравнения (13.14), (13.15), получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = - \frac{1}{4} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \psi; \quad (13.18)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4^{-1/2} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta^{-1/2} \psi \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}. \quad (13.19)$$

Система (13.18), (13.19) обладает интегралом, позволяющим найти спектр волн по известной функции распределения:

$$\Phi - \Phi_0 + 4^{2/3} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta^{-4/3} \psi = 0. \quad (13.20)$$

Отсюда

$$\psi = 4^{-2/3} \theta^{4/3} \int_0^\theta (\Phi_0 - \Phi) \theta d\theta. \quad (13.21)$$

Чтобы найти функцию  $\Phi(\theta; x)$ , заметим, что уравнения (13.18), (13.19) по своей структуре аналогичны системе уравнений, рассмотренной в [34]. Пользуясь этой аналогией, можно утверждать, что при тех значениях  $\theta$ , где значение  $\psi$  существенно превышает тепловой уровень, производная  $\partial\Phi/\partial\theta$  обязательно должна быть малой ( $\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \propto \Lambda^{-1}$ ). Обозначим границы области, где шумы велики,  $\theta_-$  и  $\theta_+$ . Тогда при  $\theta_-(x) < \theta < \theta_+(x)$  функция  $\Phi$  имеет вид плато. При всех остальных значениях  $\theta$  она, как видно из (13.20), равна  $\Phi_0$ . Обозначив высоту плато  $P(x)$ , получим:

$$\Phi(\theta; x) = \begin{cases} \Phi_0(\theta) & \theta < \theta_-(x); \\ P(x) & \theta_-(x) < \theta < \theta_+(x); \\ \Phi_0(\theta) & \theta > \theta_+(x). \end{cases} \quad (13.22)$$

Высота плато определяется из условия сохранения числа частиц

$$P(x) = \frac{2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta. \quad (13.23)$$

С учетом формул (13.22), (13.23) выражение (13.21) для спектральной функции  $\psi$  принимает вид

$$\psi = 4^{-s/2} \theta^{s/2} \left( \int_{\theta_-}^{\theta} \Phi_0 \theta d\theta - \frac{\theta^2 - \theta_-^2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta \right). \quad (13.24)$$

Уравнения для  $\theta_-$  и  $\theta_+$  получаются путем интегрирования соотношения (13.18) по промежуткам  $\theta_- - 0 < \theta < \theta_- + 0$  и  $\theta_+ - 0 < \theta < \theta_+ + 0$ . Принимая во внимание, что логарифм отношения плотности энергии воли, возбужденных пучком, к плотности энергии тепловых шумов с хорошей точностью равен  $\Lambda$ , получаем:

$$\frac{d\theta_-}{dx} = \frac{\theta_-}{4\Lambda} \left[ \frac{2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta - \Phi_0(\theta_-) \right]; \quad (13.25)$$

$$\frac{d\theta_+}{dx} = \frac{\theta_+}{4\Lambda} \left[ \frac{2}{\theta_+^2 - \theta_-^2} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \Phi_0 \theta d\theta - \Phi_0(\theta_+) \right]. \quad (13.26)$$

Граничные условия для  $\theta_-$  и  $\theta_+$  имеют вид  $\theta_-(0) = \theta_+(0) = \theta_0$ , где  $\theta_0$  — точка минимума функции  $\theta \partial\Phi_0/\partial\theta$ .

С помощью уравнений (13.25) и (13.26) нетрудно показать, что в процессе релаксации функция  $\theta_-(x)$  убывает, а  $\theta_+(x)$  возрастает. Качественная картина релаксации изображена на рис. 11. На начальной стадии поведение  $\theta_-$  и  $\theta_+$  сильно зависит от деталей функции  $\Phi_0(\theta)$  и его не удастся найти аналитически. Однако асимптотический ход релаксации сравнительно прост:

$$\theta_- = \theta^* \exp\left[-\frac{\Phi_0(0)}{4\Lambda} x\right]; \quad \theta_+ = \left(\frac{x}{4\Lambda}\right)^{1/2}. \quad (13.27)$$

Здесь  $\theta^*$  — константа, зависящая от конкретного вида  $\Phi_0(\theta)$ . Решение (13.27) применимо при  $x \gg \Lambda \Delta\theta_0^2$ , т. е. при  $\theta_- \ll \Delta\theta_0$  и  $\theta_+ \gg \Delta\theta_0$ . В асимптотическом ре-

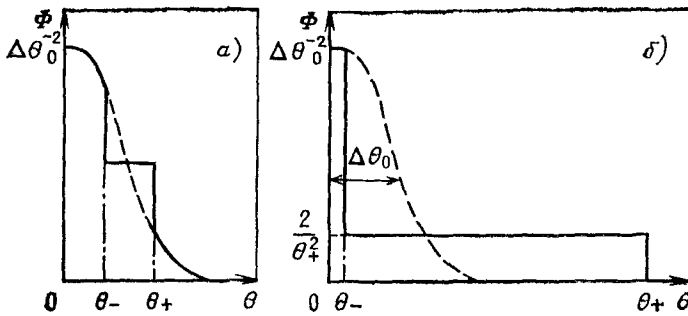


Рис 11. Динамика релаксации РЭП при возбуждении геликонов (штриховой линией изображено начальное угловое распределение частиц):

*a* — начальная стадия релаксации; *б* — асимптотическая стадия

жиме вместо формулы (13.27) можно пользоваться более удобным приближенным выражением для спектральной функции  $\psi$ :

$$\psi(\theta; x) = 4^{-1/2} \theta^{1/2} \begin{cases} 1 - \theta^2/\theta_+^2 & 0 < \theta < \theta_+; \\ 0 & \theta > \theta_+. \end{cases}$$

Отсюда следует простая формула для потока энергии волн  $\mathcal{P}$  (для наглядности поток записан в размерных переменных):

$$\mathcal{P} = \frac{9 \cdot 4^{1/2}}{20} \left( \frac{\omega_H}{\omega_p} \right)^2 n_0 m c^2 v_0 \theta_+^{1/2}. \quad (13.28)$$

Отметим, что найденное решение полностью подтверждает оценки, изложенные в разд. 13.2.

**13.3. Обсуждение результатов.** Обратимся к вопросу об условиях применимости построенного решения. Рассматривая возбуждение геликонов, мы пренебрегли их затуханием на электронах и ионах плазмы. Электронный вклад в декремент затухания определяется следующей формулой (см., например, [19]):

$$\Gamma_e = - \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \omega \frac{k_{\perp}}{k} \frac{k_{\perp}}{|\omega_H|} \left( \frac{T}{m} \right)^{1/2} \times \\ \times \exp \left( - \frac{m\omega^2}{2k_{\parallel}^2 T} \right) \left( 1 - \frac{m\omega^2}{2k_{\parallel}^2 T} + \frac{m^2\omega^4}{2k_{\parallel}^4 T^2} \right).$$

Если «продольная» фазовая скорость геликона  $\omega/|k_{\parallel}|$  существенно превосходит тепловую скорость, то затухание экспоненциально мало и порог неустойчивости очень низок. В обратном пределе

$$\Gamma_e \approx - \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \omega \frac{k_{\perp}}{k} \frac{k_{\perp}}{|\omega_H|} \left( \frac{T}{m} \right)^{1/2}. \quad (13.29)$$

Сравнение формул (13.29) и (4.8) показывает, что требование ма-

лости электронного затухания на протяжении всего процесса релаксации имеет вид

$$\frac{n_b}{n} > \left( \frac{\omega_H}{\omega_p} \right)^2 \left( \frac{mv_0}{p_0} \right)^2 \left( \frac{T}{mc^2} \right)^{1/2}.$$

Малость затухания на ионах обеспечивается тем, что фазовая скорость волн велика по сравнению с  $v_{Ti}$ :

$$\frac{\omega}{k} \equiv c \left| \frac{\omega_H}{\omega_p} \frac{k_{\parallel} c}{\omega_p} \right| > \left( \frac{T}{M} \right)^{1/2}.$$

Если принять во внимание, что  $k_{\parallel} \approx (m/p_0)\omega_H$ , то отсюда вытекает следующее ограничение на  $|\omega_H|$ :

$$|\omega_H| > \omega_p (p_0/mc)^{1/2} (T/Mc^2)^{1/4}. \quad (13.30)$$

Отметим, что раскачка геликонов возможна и при нарушении неравенства (13.30). В этом случае должны возбуждаться волны с большими значениями  $k_{\parallel}$ , отвечающими циклотронным резонансам высоких порядков.

Кроме неравенства (13.30) имеется еще два ограничения на  $\omega_H$ :

$$|\omega_H| > (\Delta\theta)^{1/2} \omega_p (p_0/mv_0) (m/M)^{3/2};$$

$$|\omega_H| > \omega_p \frac{1}{\Delta\theta} \left( \frac{n_b p_0}{n m v_0} \right)^{1/2}.$$

Первое из них означает, что частота возбуждаемых волн велика по сравнению с циклотронной частотой ионов, второе — что  $\Gamma < \omega$ . Эти условия совместно с (13.30) определяют минимально возможное значение длины релаксации (13.4).

В реальной ситуации пучок наряду с геликонами возбуждает в плазме также ленгмюровские колебания. Сравнивая эти два эффекта, будем считать для определенности, что влияние магнитного поля на закон дисперсии ленгмюровских волн мало и что уровень энергии этих волн ограничен только процессом  $U$ -рассеяния. Чтобы ленгмюровские волны не приводили к слишком быстрому размытию пучка, длина релаксации (13.4) должна быть меньше  $l$ , определенной формулой (9.7). В дополнение к этому существует ограничение на начальный угловой разброс пучка:  $\Delta\theta_0 > (l_h/l)^{1/3}$ , смысл которого состоит в следующем.

При «ленгмюровском» механизме релаксации разброс, как уже отмечалось, изменяется по закону  $\Delta\theta(z) \sim (z/l)^{1/5}$ . С другой стороны, при релаксации на геликонах  $\Delta\theta(z) \sim (z/l_h)^{1/2}$ . Отсюда видно, что релаксация пучка с малым разбросом ( $\theta_{\Delta 0} < (l_h/l)^{1/3}$ ) происходит в две стадии: на первой (вплоть до  $\Delta\theta \sim (l_h/l)^{1/3}$ ) угловой разброс увеличивается из-за взаимодействия электронов с ленгмюровскими колебаниями, а на второй — из-за взаимодействия с геликонами. Если же  $\Delta\theta_0 > (l_h/l)^{1/3}$ , то первая стадия релаксации несущественна.

Добавим, что даже в том случае, когда размытие пучка по углу связано с возбуждением геликонов, релаксация по энергии может

быть обусловлена ленгмюровскими колебаниями. Соответствующая оценка энергетических потерь пучка имеет вид

$$\frac{\Delta E}{E_0} \sim \begin{cases} (l_h/l)^{1/2}; & \Delta\theta_0 < (l_h/l)^{1/2}; \\ (l_h/l) \frac{1}{\Delta\theta_0^2}; & \Delta\theta_0 > (l_h/l)^{1/2}. \end{cases}$$

Этот результат легко получается из соотношения, связывающего потери энергии на возбуждение ленгмюровских колебаний с угловым разбросом пучка (см. § 9):

$$\frac{d}{dz} \frac{\Delta E}{E_0} \sim \frac{1}{l\Delta\theta^2}.$$

Покажем теперь, что в интересующих нас условиях можно пренебречь нелинейным взаимодействием геликонов с ленгмюровскими колебаниями. Речь идет о процессе распада  $l \rightarrow l + h$ , где символами  $l$  и  $h$  соответственно обозначены ленгмюровские волны и геликоны. Вычисление вероятности этого процесса дает для характерного времени распада следующую оценку:

$$\tau_{l \rightarrow l+h}^{-1} \sim \omega_p \frac{U^l}{nmc^2} \left( \frac{k_h c}{\omega_p} \right)^3.$$

Воспользовавшись этой оценкой и выражением (9.5) для плотности энергии ленгмюровских волн, нетрудно проверить, что  $\tau_{l \rightarrow l+h}^{-1} \ll \Gamma$ , где  $\Gamma$  — инкремент раскачки геликонов пучком.

Сделаем еще замечание относительно взаимодействия пучка с низкочастотными колебаниями, в которых существенно движение ионов. Как видно из условия циклотронного резонанса,  $z$  — составляющая волнового вектора волны, взаимодействующей с пучком, ограничена снизу величиной  $|\omega_H m / p_0|$ . Поэтому при  $T/mc^2 \gg (m/M) (p_0/mc)^2$  выполняется неравенство

$$k_{\parallel} (T/M)^{1/2} \gg |\omega_H| m/M, \quad (13.31)$$

позволяющее считать движение ионов в колебаниях немагнитным. Более того, нетрудно показать, что при  $H^2 < 8\pi nT$  неравенство (13.31) позволяет вообще пренебречь вкладом ионов в дисперсионное соотношение. (Здесь имеется в виду изотермическая плазма, где невозможна раскачка ионного звука.) Это значит, что при указанных условиях низкочастотные (ионные) колебания не влияют на релаксацию пучка.

В заключение отметим, что все изложенные в этом параграфе результаты относились к случаю неограниченного в поперечном направлении пучка. Тем самым подразумевалось выполненным неравенство  $R \gg l_h$ , где  $R$  — радиус пучка. Если же  $R < l_h$ , то волны, распространяясь в радиальном направлении, покидают область взаимодействия с пучком, не успев нарасти. Ограничение  $R \gg l_h$  может, однако, оказаться несущественным, если из-за радиальной неоднородности

родности концентрации плазмы и магнитного поля плазменный столб представляет собой волновод. Для геликонов такая ситуация легко осуществима. Качественная картина релаксации при этом остается той же, что и в случае неограниченного пучка.

## 14. Горячие электроны

**14.1. Нагрев электронов в плазме без магнитного поля.** При пучковом нагреве плазмы умеренной плотности, в которой роль столкновений мала, основная часть выделяемой пучком энергии может передаваться малой группе надтепловых электронов. Естественное объяснение этого эффекта состоит в том, что спектр возбуждаемых пучком волн благодаря нелинейным процессам уширяется в сторону меньших фазовых скоростей до тех пор, пока волны не начнут затухать на электронах плазмы (здесь и ниже имеются в виду ленгмюровские волны). При этом электроны, ответственные за поглощение волн, вовлекаются в режим ускорения, так как по мере увеличения энергии они попадают в резонанс со все более быстрыми волнами. Отсюда видна тенденция к формированию в плазме так называемых электронных хвостов. Количество частиц в хвосте и их энергетический спектр зависят от механизма перекачки волн в область поглощения. В случае плазмы без магнитного поля, с которого мы начнем рассмотрение, перекачка обусловлена ленгмюровским коллапсом. В магнитоактивной плазме, где закон дисперсии волн меняется, основной причиной перекачки может стать упругое рассеяние волн на возмущенных плотностях плазмы. Коллапс в этом случае играет лишь вспомогательную роль (см. разд. 14.2).

В режиме развитой турбулентности, когда в объеме плазмы имеется большое число случайно расположенных коллапсирующих каверн, нагрев электронов и поглощение волн удобно описывать с помощью согласованной системы уравнений, состоящей из квазилинейного уравнения для частиц и уравнения для спектральной плотности волн. Такой подход позволяет легко учесть качественные особенности перестройки спектра волн вследствие коллапса. В предположении об изотропии волн и частиц исходная система уравнений имеет следующий вид [72, 73]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \omega_p^3 \frac{e^2}{m^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \int_{\omega_p/v}^{\infty} N_k \frac{dk}{k} \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v}; \quad (14.1)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial k} \left( N_k |k^2 \frac{dk}{dt} \right) - \frac{8\pi^3 e^2 \omega_p^2}{mk^3} N_k f \left( \frac{\omega_p}{k} \right). \quad (14.2)$$

Здесь величина  $dk/dt$ , рассматриваемая как функция  $k$ , задает скорость спектральной перекачки, обусловленной коллапсом. Конкрет-



ный вид этой функции определяется динамикой коллапсирующих каверн. Так, в частности, при сверхзвуковом коллапсе

$$dk/dt \sim k^{5/2}. \quad (14.3)$$

(рассмотрение других моделей коллапса в связи с задачей о нагреве электронов проведено в [74—77]).

Формула (14.3), вообще говоря, требует уточнения, так как она получена в предположении о постоянстве полной энергии захваченных в каверну волн. Мы, однако, не будем подправлять ее здесь, поскольку изменение динамики каверны вследствие затухания не сказывается на результате дальнейших оценок.

В области очень больших фазовых скоростей, где затухание на горячих частицах отсутствует, уравнение (14.2) имеет решение с постоянным потоком волн по спектру, отвечающее «свободному» коллапсу:

$$N_k = (1/\omega_p) (M/Tl_0)^{1/2} q/k^{5/2}. \quad (14.4)$$

Здесь  $q$  — мощность, вкладываемая в единицу объема плазмы, а  $l_0$  — характерный начальный размер каверн. Для отыскания величин  $q$  и  $l_0$  необходимо воспользоваться решением задачи о спектре волн, взаимодействующих с пучком. Так, в частности, для пучков достаточно малой плотности, рассмотренных в § 9, мощность  $q$  задается формулой (9.32), а размер  $l_0$  определяется условием перехода коллапса из дозвукового режима в сверхзвуковой:

$$l_0 \sim r_D (M/m)^{1/2}. \quad (14.5)$$

Формула (14.4) справедлива при тех значениях  $k$ , для которых характерное время сжатия каверны, отвечающее удвоению волнового числа, мало по сравнению со временем затухания захваченных плазмонов. На коротковолновой границе спектра (14.4) эти времена должны быть сопоставимыми, что позволяет найти связь между концентрацией и скоростью частиц, ответственных за затухание [77]. Обозначив искомую скорость  $v_*$ , можно оценить граничное значение волнового числа как  $\omega_p/v_*$ . Соответствующее время сжатия каверны дается выражениями (11.14) и (11.15):

$$\tau_{v_*/\omega_p} \sim l_0 (M/T)^{1/2} (v_*/\omega_p l_0)^{1/2}. \quad (14.6)$$

Условие равенства этого времени обратному декременту затухания, который можно оценить как  $\omega_p n'/n$ , где  $n'$  — концентрация поглощающих частиц, приводит к следующему соотношению:

$$n' \sim n (T/Mv_*^2)^{1/2} (\omega_p l_0 v_*)^{1/2}. \quad (14.7)$$

Эта формула вместе с условием энергетического баланса

$$n' m v_*^2 / 2 \sim q t \quad (14.8)$$

полностью описывает динамику электронного хвоста. Из соотношений (14.7) и (14.8) следует, что характерная энергия надтепловых

электронов растет со временем пропорционально  $t^4$ , а концентрация частиц, ответственных за поглощение, убывает как  $t^{-3}$ . Отсюда видно, что большинство электронов «не поспевает» за движением границы хвоста в сторону больших скоростей. Иными словами, движущаяся граница как бы оставляет за собой в пространстве скорости стационарный шлейф [76]. Поскольку при этом в каждый момент времени выполняется соотношение (14.7), функция распределения частиц в шлейфе имеет следующий вид [73, 76, 78]:

$$f \sim n(T/M)^{1/2} (\omega_p l_0)^{1/2} (1/v^{3/2}). \quad (14.9)$$

Подставив выражение (14.9) в уравнение (14.1), нетрудно найти спектр волн, обеспечивающих стационарность шлейфа:

$$N_k = C(t)/k^{1/2}. \quad (14.10)$$

Входящая сюда функция  $C(t)$  определяется сшивкой решений (14.10) и (14.4) при  $k \sim \omega_p/v_*(t)$ :

$$C(t) = (M/Tl_0)^{1/2} q \omega_p/v_*^2. \quad (14.11)$$

Рассматривая динамику нагрева электронов, мы пренебрегли их уходом из плазмы. В этом случае изложенные результаты применимы до тех пор, пока горячие электроны не влияют на закон дисперсии ленгмюровских волн, для чего их полная энергия должна быть меньше тепловой энергии плазмы. При наличии потерь рост энергии горячих электронов со временем прекращается. Чтобы оценить соответствующую предельную энергию, достаточно заменить время  $t$  в формуле (14.8) энергетическим временем жизни быстрого электрона  $\tau(v_*)$ . При свободном вылете электронов  $\tau(v_*) \sim L/v_*$ , где  $L$  — размер зоны нагрева. Что же касается соотношений (14.7) и (14.9) — (14.11), то они при учете потерь сохраняют свой первоначальный вид.

**14.2. Нагрев электронов в магнитоактивной плазме [79].** Чтобы пояснить роль магнитного поля в задаче о формировании электронного хвоста, обратимся к рис. 12, на котором изображены линии постоянной частоты ленгмюровских волн в магнитном поле и область возбуждения волн пучком

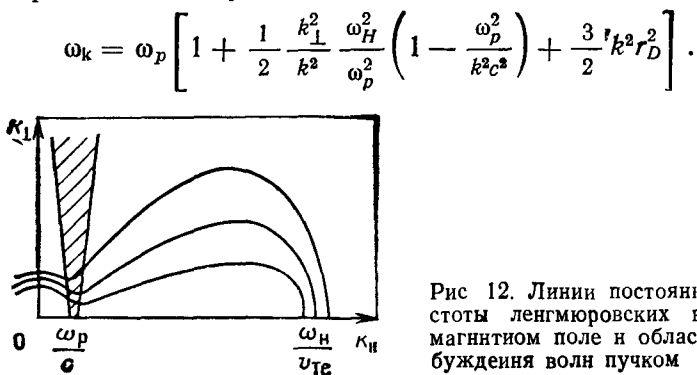


Рис 12. Линии постоянной частоты ленгмюровских волн в магнитном поле и область возбуждения волн пучком

Штриховкой на рисунке выделена область взаимодействия волн с пучком (резонансная область). Рисунок соответствует малым значениям параметра  $\beta \equiv 8\pi nT/H^2$ , когда вклад магнитного поля в закон дисперсии резонансных волн велик по сравнению с тепловым. В этом случае на резонансные волны приходится лишь малая доля полного фазового объема ( $\ll \beta^{3/2}$ ). Показанные на рисунке линии постоянной частоты простираются вплоть до волновых чисел порядка  $r_D^{-1} \omega_H / \omega_p$ . Соответствующая фазовая скорость волн оценочно равна  $v_{Te} \omega_p / \omega_H$ . Если в плазме имеется достаточное число электронов со скоростями, превышающими  $v_{Te} \omega_p / \omega_H$ , то перераспределение ленгмюровских волн вдоль линий  $\omega_k = \text{const}$  в результате упругого рассеяния на возмущениях плотности может приводить к поглощению волн этими электронами [80]. Важной особенностью такого режима является то, что упругое рассеяние волн одновременно выступает как механизм стабилизации пучковой неустойчивости. Поэтому задача о нагреве электронов должна в данном случае с самого начала решаться совместно с задачей о возбуждении волн пучком. Применительно к этой задаче можно написать следующее условие энергетического баланса:

$$\Gamma U_R = \Gamma_* U_* \quad (14.12)$$

где  $\Gamma$  — инкремент пучковой неустойчивости;  $\Gamma_*$  — декремент затухания волн на горячих электронах, а  $U_R$  и  $U_*$  — плотности энергии возбуждаемых и затухающих волн.

Относительно возмущений плотности, обеспечивающих переброс волн вдоль линий  $\omega_k = \text{const}$  из одной области фазового пространства в другую и поддерживающих баланс между накачкой и затуханием, предположим, что они порождаются высокочастотным давлением самих ленгмюровских волн. Чтобы упругое рассеяние волн на этих возмущениях действительно было основным механизмом поддержания энергетического баланса, частота такого рассеяния должна быть выше частоты спектральной перекачки, обусловленной индуцированным рассеянием ленгмюровских волн на частицах плазмы. Проделав в этом предположении все оценки, сформулируем затем соответствующее условие количественно [см. формулу (14.34)].

Возбуждение, затухание и упругое рассеяние ленгмюровских волн описываются кинетическим уравнением, аналогичным по своей структуре уравнению (11.4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} = & 2\Gamma_k N_k + \frac{\omega_p^2}{32\pi^3} \int (n_{k-k_1} + n_{k_1-k}) \left( \frac{k k_1}{k k_1} \right)^2 \times \\ & \times (N_{k_1} - N_k) \delta(\omega_k - \omega_{k_1}) d\mathbf{k}_1. \end{aligned} \quad (14.13)$$

Входящая сюда спектральная функция возмущений плотности  $n_{\mathbf{k}}$  нормирована условием  $\langle (\delta n/n)^2 \rangle = \int n_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} / (2\pi)^3$ , где  $\langle (\delta n/n)^2 \rangle$  — средний квадрат возмущений, измеряемый в относительных единицах.

Оценивая скорость рассеяния, примем, что переброс волн из резонансной области в область затухания идет не диффузионным путем, а за один шаг; иными словами, что среднее волновое число возмущений плотности сопоставимо с волновым числом затухающих волн. Получающийся результат оправдывает это предположение. Характерные частоты рассеяния резонансных и нерезонансных волн в такой ситуации одинаковы; уравнение (14.13) дает для них следующую оценку:

$$v_* \sim \omega_p (\delta n/n)^2 (\omega_p/\omega_H)^2. \quad (14.14)$$

Выясним далее, как соотносятся друг с другом величины  $\Gamma$ ,  $\Gamma_*$  и  $v_*$ . Для этого необходимо предварительно рассмотреть вопрос об ускорении электронов до энергии  $E \sim T (\omega_p/\omega_H)^2$  — той минимальной энергии, начиная с которой электроны могут поглощать ленгмюровские волны, возникающие в результате упругого рассеяния резонансных волн. Чтобы электроны приобрели требуемую «затравочную» энергию, необходим переброс некоторой доли ленгмюровских волн в область достаточно малых фазовых скоростей ( $\omega_p/k < < v_{Te} \omega_p/\omega_H$ ). В теории известен только один механизм такого переброса — ленгмюровский коллапс. Естественно предположить, что именно он и ответствен за подогрев электронов до  $E \sim T (\omega_p/\omega_H)^2$ . Поскольку нас в конечном счете интересует ускорение электронов до существенно больших энергий, мощность, диссипируемая в процессе коллапса, должна составлять в рассматриваемой модели малую часть мощности нагрева. Это обеспечивается уже упоминавшейся медленностью индуцированного рассеяния, т. е. малостью энергии, стекающей в ленгмюровский конденсат и вовлекаемой в коллапс. Обозначим  $\tilde{n}_*$  концентрацию электронов, попавших благодаря коллапсу в область  $E > T (\omega_p/\omega_H)^2$ . Оценка декремента затухания ленгмюровских волн на этих электронах имеет вид  $\tilde{\Gamma}_* \sim \sim \omega_p \tilde{n}_*/n$ .

Будем считать, что подогрев электронов в результате коллапса достаточен для выполнения условия

$$\tilde{\Gamma}_* \gg \Gamma. \quad (14.15)$$

(Обратный случай рассмотрен в [30]). Тогда все дальнейшие оценки оказываются нечувствительными к конкретному значению  $\tilde{n}_*$ .

Возвращаясь к вопросу о соотношении между  $\Gamma$ ,  $\Gamma_*$  и  $v_*$ , заметим, что в стационарном режиме не может выполняться ни одно из неравенств

$$v_* \ll \Gamma; \quad (14.16)$$

$$v_* \ll \Gamma_*. \quad (14.17)$$

Действительно, неравенство (14.16) означало бы, что рассеяние не успевает выводить возбуждаемые пучком волны из резонансной области, а неравенство (14.17) — что волны поглощаются быстрее, чем рассеяние поставляет их в область затухания.

В интересующих нас условиях исключена также возможность того, что  $v_*$  существенно превышает наибольшую из величин  $\Gamma$  и  $\Gamma_*$ . Этот случай соответствовал бы эргодическому распределению ленгмюровских волн, в котором спектральная плотность энергии постоянна на линиях  $\omega_k = \text{const}$ , т. е. спектральные плотности энергии в областях возбуждения и затухания одинаковы. Поскольку область затухания отвечает большему волновым числам, ее фазовый объем заведомо превышает объем резонансной области, но тогда

$$U_* \gg U_R. \quad (14.18)$$

С другой стороны, эргодичность спектра означает, что в затухание вносят вклад все частицы с энергией, превышающей  $T(\omega_p/\omega_H)^2$ ; при этом  $\Gamma_* \sim \tilde{\Gamma}_*$  и  $\Gamma_* \gg \Gamma$  [см. формулу (14.15)]. Нетрудно видеть, что столь сильное затухание несовместимо с условием энергетического баланса.

Изложенные соображения показывают, что частота рассеяния оценочно равна максимальной из величин  $\Gamma$  и  $\Gamma_*$ . При этом в зависимости от соотношения между  $\Gamma$  и  $\Gamma_*$  имеются три возможности:

$$\Gamma \ll \Gamma_* \sim v_*; \quad (14.19)$$

$$\Gamma_* \ll \Gamma \sim v_*; \quad (14.20)$$

$$\Gamma_* \sim \Gamma \sim v_*. \quad (14.21)$$

Первая из них должна быть отброшена по той же причине, что и рассмотренный выше случай  $v_* \gg \max(\Gamma, \Gamma_*)$  (условие  $v_* \gg \Gamma$  приводит к соотношению (14.18), которое при  $\Gamma_* \gg \Gamma$  вступает в противоречие с (14.12)). Соотношение (14.20) также неприемлемо, так как оно включает в себя неравенство  $v_* \gg \Gamma_*$ , позволяющее считать спектр нерезонансных волн эргодическим, а в этом случае  $\Gamma_* \sim \tilde{\Gamma}_*$ , что приводит к противоречию между (14.20) и (14.15). Таким образом, при выполнении неравенства (14.15) может осуществиться только режим (14.21). Подчеркнем, что условие  $\Gamma_* \sim \Gamma$ , входящее в соотношение (14.21), не противоречит неравенству (14.15). Оно лишь налагает определенное ограничение на форму спектра ленгмюровских волн: волны должны быть сосредоточены преимущественно в той области  $k$ -пространства, где декремент их затухания меньше или порядка  $\Gamma$ , а в области более сильного затухания энергия волн мала. Декремент затухания естественно считать растущей функцией волнового числа. При этом спектр волн спадает в сторону малых фазовых скоростей, так что на долю наиболее медленных электронов [из числа присутствующих в области  $E > T(\omega_p/\omega_H)^2$ ] приходится сравнительно небольшая часть поглощаемой энергии. Это значит, что концентрация электронов, реально ответственных за поглощение ленгмюровских волн, меньше  $\tilde{n}_*$ . Она определяется условием  $\Gamma_* \sim \Gamma$  и равна

$$n_* \sim n\Gamma/\omega_p. \quad (14.22)$$

Помимо  $n_*$  оценка (14.21) (с учетом (14.14)) позволяет найти

уровень возмущений плотности плазмы

$$(\delta n/n)^2 \sim (\omega_H/\omega_p)^2 \Gamma/\omega_p. \quad (14.23)$$

Кроме того, из формул (14.21) и (14.12) следует, что плотности энергии резонансных ( $U_R$ ) и нерезонансных ( $U_*$ ) волн по порядку одинаковы.

Заслуживает внимания то обстоятельство, что для оценки  $n_*$  и  $\delta n/n$  не требуется конкретизировать зависимость величины  $\delta n/n$  от энергии ленгмюровских волн  $U$ . Знание этой зависимости необходимо лишь для определения скорости нагрева плазмы и характерной энергии горячих электронов. В условиях применимости приближения слабой турбулентности величину  $(\delta n/n)^2$  можно выразить через  $U$  с помощью уравнения, описывающего распадное взаимодействие ленгмюровских и ионно-звуковых волн, аналогично тому, как был найден уровень вынужденных возмущений плотности в § 11 [см. формулу (11.5)]. Обозначив  $k_*$  характерное волновое число ленгмюровских колебаний, получим

$$(\delta n/n)^2 \sim (T/M)^{1/2} (k_*/\omega_p) (U_*/nT)^2 (\omega_p/\omega_H)^2 \quad (14.24)$$

(эта оценка относится к изотермической плазме). При одинаковых плотностях энергии резонансных и нерезонансных волн величина  $\delta n/n$  определяется преимущественно нерезонансными волнами, так как этим волнам соответствуют большие значения  $k$ . Поскольку примерно половина всех нерезонансных волн сосредоточена в области поглощения, волновое число  $k_*$  можно выразить через характерную скорость горячих электронов

$$k_* \sim \omega_p/v. \quad (14.25)$$

Скорость  $v$ , в свою очередь, определяется вкладываемой в плазму мощностью:

$$n_* \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} \sim 2\Gamma_* U_* \sim 2\Gamma U_R. \quad (14.26)$$

Комбинируя теперь соотношения (14.21)—(14.26), находим

$$\frac{U_*}{nT} \sim \frac{U_R}{nT} \sim (\omega_p t)^{1/2} \left(\frac{2\Gamma}{\omega_p}\right)^{2/3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_p}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/3}; \quad (14.27)$$

$$\frac{mv^2}{2T} \sim (\omega_p t)^{4/3} \left(\frac{2\Gamma}{\omega_p}\right)^{2/3} \left(\frac{\omega_H}{\omega_p}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/3}. \quad (14.28)$$

Как видно из полученных формул, величина  $U/nT$  растет со временем пропорционально  $t^{1/3}$ . Если не принимать в расчет потери горячих частиц, то рост  $U$  ограничивается тем, что к моменту

$$t \sim \frac{\omega_p}{\Gamma^2} \frac{m}{M} \left(\frac{\omega_p}{\omega_H}\right)^2 \quad (14.29)$$

энергия волн достигает порога модуляционной неустойчивости

$$U/nT \sim (\omega_H/\omega_p)^2. \quad (14.30)$$

Вблизи порога (14.30) возмущения плотности начинают расти с увеличением  $U$  гораздо быстрее, чем это следует из формулы (14.24). По этой причине энергия ленгмюровских волн не может превысить порог (14.30), а оказывается «замороженной» на несколько более низком уровне, мало отличающемся от порогового. Действительно, при подходе величины  $U$  к порогу (14.30) одновременно с возмущениями плотности резко возрастает и  $\nu$ . Связанный с этим усиленный перебор волн из резонансной области в область затухания приостанавливает рост  $U$ . Чтобы такая схема могла реализоваться, возмущения плотности должны успевать «следить» за уровнем ленгмюровских шумов. Иными словами, характерное время релаксации этих возмущений, равное по порядку  $\omega_H^{-1} (M/m)^{1/2}$ , должно быть меньше обратного инкремента пучковой неустойчивости:

$$\Gamma < \omega_H (m/M)^{1/2}. \quad (14.31)$$

Подчеркнем, что, несмотря на близость энергии к порогу (14.30), роль коллапса в режиме (14.31) остается малой. Коллапс начинает вносить существенный вклад в диссипацию только при нарушении неравенства (14.31), когда ленгмюровские волны возбуждаются пучком настолько быстро, что их энергия может превысить порог (14.30). Из высказанных здесь замечаний видно, что при выполнении условия (14.31) формулу (14.24), начиная с момента времени (14.29), надлежит заменить соотношением (14.30). Это дает вместо (14.28) следующую оценку энергии горячих электронов:

$$E/T \sim 2\omega_p t (\omega_H/\omega_p)^2. \quad (14.32)$$

Предельно достижимая энергия определяется либо длительностью инжекции пучка, либо временем вылета электрона из плазмы, равным  $L/v$ , где  $L$  — длина системы. В последнем случае

$$E/T \sim (L/r_D)^{2/3} (\omega_H/\omega_p)^{4/3}. \quad (14.33)$$

Чтобы на начальной стадии нагрева мог осуществляться режим, описываемый формулами (14.27), (14.28), характерная энергия, приобретаемая электроном к моменту времени (14.29), должна превышать  $T(\omega_p/\omega_H)^2$ . Возникающее отсюда ограничение на инкремент неустойчивости  $\Gamma$  совпадает с неравенством (14.31).

Уточним наконец условие, при котором можно пренебречь перекачкой энергии в ленгмюровский конденсат из-за индуцированного рассеяния волн на частицах плазмы. Частота рассеяния на ионах оценочно равна

$$\omega_p (kv_{Te}/\omega_H)^2 (m/M) (\omega_p/\omega_H)^2 U/nT$$

и в режиме (14.30) не превышает  $\omega_p m/M$ . Предельно возможное значение частоты рассеяния на электронах для данного режима равно  $\omega_p (\omega_H/\omega_p)^5$ . Искомое условие представляет собой требование малости этих частот по сравнению с  $\Gamma$ :

$$\Gamma > \omega_p [m/M + (\omega_H/\omega_p)^5]. \quad (14.34)$$

Это ограничение дополняет полученное ранее неравенство (14.31).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Winterberg F.//Phys. Rev. 1968. Vol. 174. P. 212—220.
2. Бабыкин М. В., Завойский Е. К., Иванов А. А., Рудаков Л. И.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. 1971. Vienna, IAEA. 1971. Vol. 1. P. 635—643.
3. Budker G. I.//6th Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Moscow, 1973. M., 1974. Vol. 2. P. 136—158.
4. Sudan R. N.//Ibid. P. 184—199.
5. Breizman B. N., Ryutov D. D.//Nucl. Fus. 1974. Vol. 14. P. 873—907.
6. Мощные электронные и ионные пучки (библиографический указатель). Препринт ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1979.
7. Шафранов В. Д.//Вопросы теории плазмы./Под ред. М. А. Леонтовича, М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3.
8. Гинзбург В. Л.//Успехи физ. наук. 1959. Т. 69. С. 537—564.
9. Железняков В. В.//Изв. вузов. Радиофизика. 1959, Т. 2, С. 14—27.
10. Wright H., Wiginton C. L., Neufeld J.//Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1375—1384.
11. Bludman S. A., Watson K. M., Rosenbluth M. N.//Ibid. 1960. Vol. 3. P. 741—757.
12. Файнберг Я. Б., Шапиро В. Д., Шевченко В. И.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1969, Т. 57. С. 966—977.
13. Weibel E. S.//Phys. Rev. Lett. 1959. Vol. 2. P. 83—84.
14. Брейзман Б. Н., Мирнов В. В.//Геомagnetизм и астрономия, 1970, Т. 10. С. 34—37.
15. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1971, Т. 60. С. 408—422.
16. Рудаков Л. И.//Там же. 1970, Т. 59. С. 2091—2104.
17. Ferch R. L., Sudan R. N.//Plasma Phys. 1975. Vol. 17. P. 905—915.
18. Godfrey V. B., Shapahan W. R., Thode L. E.//Phys. Fluids. 1975. Vol. 18. P. 346—355.
19. Ахизер А. И., Ахизер И. А., Половин Р. В. и др. Электродинамика плазмы. М.: Наука, 1974.
20. Zayed K. E., Kitsenko A. V.//Plasma Phys. 1968. Vol. 10. P. 147—160.
21. Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.//Успехи физ. наук. 1971. Т. 103. С. 609—640.
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2.
23. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.
24. Железняков В. В., Суворов Е. В.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1968, Т. 54. С. 627—640.
25. Железняков В. В.//Астроном. журн. 1967. Т. 44. С. 42—54.
26. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
27. Веденов А. А., Рютов Д. Д.//Вопросы теории плазмы./Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1972. Вып. 6.
28. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д.//Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 606—609.
29. Nishikawa K., Ryutov D. D.//J. Phys. Soc. Japan. 1976. Vol. 41. P. 1757—1765.
30. Брейзман Б. Н., Ерофеев В. И. Препринт ИЯФ СО АН СССР № 83—52. Новосибирск, 1983.
31. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.//Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.
32. Drummond W. E., Pines D.//Nucl. Fus., Suppl. 1962. Vol. 3. P. 1049—1058.
33. Drummond W. E.//Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 1133—1134.
34. Иванов А. А., Рудаков Л. И.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1966, Т. 51, С. 1522—1534.
35. Thode L. E., Sudan R. N.//Phys. Fluids, 1975. Vol. 18. P. 1552—1563.
36. Lampe M., Sprangle P.//Ibid. 1975. Vol. 18. P. 475—481.
37. Thode L. E.//Ibid. 1976. Vol. 19. P. 305—315.



38. Вedenov A. A. // Вопросы теории плазмы. / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 3.
39. Кадомцев Б. Б. // Там же. / Под ред. М. А. Леонтовича, М.: Атомиздат, 1964. Вып. 4.
40. Галеев А. А., Сагдеев Р. З. // Там же. / Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1973. Вып. 7.
41. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме: М.: Наука, 1967.
42. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. // Ядерный синтез. 1965. Т. 5. С. 20—40.
43. Галеев А. А., Карпман В. И., Сагдеев Р. З. // Докл. АН СССР, 1964, Т. 157. С. 1087—1091.
44. Брейзман Б. Н., Захаров В. Е., Мушер С. Л. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1973. Т. 64. С. 1297—1313.
45. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. Пер. с франц. М.: Наука, 1976.
46. Kruer W. L., Valeo E. J. // Phys. Fluids, 1973, Vol. 16. P. 675—682.
47. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е. // Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 519—522.
48. Брейзман Б. Н. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1977. Т. 72. С. 518—520.
49. Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М. // Там же. 1975. Т. 69. С. 155.
50. Цытович В. Н., Шапиро В. Д. // Ядерный синтез, 1965. Т. 5. С. 228—233.
51. Брейзман Б. Н., Рютов Д. Д., Чеботаев П. З. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1972. Т. 62. С. 1409—1423.
52. Вedenov A. A., Рудаков Л. И. // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159. С. 767.
53. Захаров В. Е. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1972. Т. 62. С. 1745—1759.
54. Дегтярев Л. М., Захаров В. Е. Препринт ИПМ АН СССР № 106. М., 1974.
55. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы. М.: Атомиздат, 1971.
56. Брейзман Б. Н. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1975. Т. 69. С. 896—908.
57. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика. М.: Наука, 1972.
58. Каплан С. А., Цытович В. Н. // Астроном. журн. 1967, Т. 44. С. 1194—1205.
59. Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н. Физика плазмы солнечной атмосферы. М.: Наука, 1977.
60. Малкин В. М. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1982. Т. 83. С. 88—105.
61. Малкин В. М. // Там же. С. 1725—1737.
62. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. // Там же. 1977. Т. 72. С. 507—517.
63. Рудаков Л. И. // Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 729—733.
64. Papadopoulos K. // Phys. Fluids. 1975. Vol. 18. P. 1769—1777.
65. Вedenov A. A. Теория турбулентной плазмы. М.: Изд-во ВИНТИ, 1965.
66. Малкин В. М. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1984. Т. 86. С. 1263—1272.
67. Брейзман Б. Н., Малкин В. М., Соболев О. П. // Там же. 1977. Т. 72. С. 1783—1796.
68. Брейзман Б. Н., Фезисов С. Г. // Там же. 1974. Т. 66. С. 200—211.
69. Лившиц М. А., Цытович В. Н. // Там же. 1972. Т. 62. С. 606—613.
70. Якименко В. Л. // Там же. 1963. Т. 44. С. 1534—1543.
71. Роуландс Дж., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. // Там же. 1966. Т. 50. С. 979—993.
72. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Сигов Ю. С. и др. // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 10—20.
73. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1977. Т. 73. С. 1352—1369.
74. Горев В. В., Кингсеп А. С., Рудаков Л. И. // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. Т. 19. С. 691—720.
75. Кингсеп А. С., Яньков В. В. // Физика плазмы. 1975. Т. 1. С. 722—728.
76. Горев В. В., Кингсеп А. С., Яньков В. В. // Журн. эксперим. и теорет. физ. 1976. Т. 70. С. 921—928.
77. Кингсеп А. С. // Там же. 1978. Т. 74. С. 99—111.
78. Горбушина Т. А., Дегтярев Л. М., Захаров В. Е., Равинская В. Н. Препринт ИПМ АН СССР № 128. М., 1975.
79. Брейзман Б. Н., Ерофеев В. И. Физика плазмы. 1985. Т. 11, С. 387—393.
80. Breizman B. N., Ryutov D. D. // Proc. Intern. Conf. on Plasma Phys. Nagoya, 1980. Vol. 2. P. 55—61.

# РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СТЕЛЛАРАТОРАХ

В. Д. Пустовитов, В. Д. Шафранов

## ВВЕДЕНИЕ

Стеллараторы — это класс тороидальных магнитных систем, в которых магнитные поверхности создаются не током, возбуждаемым вдоль плазменного шнура, как это делается в токамаке, а внешним магнитным полем, имеющим винтовую структуру. Возможны два способа создания вращательного преобразования без продольного тока в плазме. Соответственно различают два типа стеллараторов.

Первый способ — создание вращательного преобразования за счет кручения (вывода из плоскости) оси соленоида, формирующего продольное поле (рис. 1). Этот способ реализован в первом стеллараторе — восьмерке Спитцера [1, 2] и впоследствии был использован в установках М-8 [3], асператор [4] (рис. 2) и при разработке систем дракон [5] и гелиак [6].

Второй способ — создание полоидальных полей внешними винтовыми токами. Несмотря на то что циркуляция таких полей по лю-

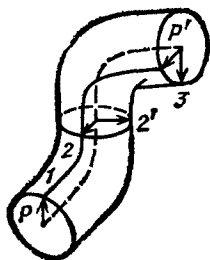


Рис. 1. Прокручивание магнитной силовой линии  $PP'$  относительно нормали к оси (пунктир) соленоида с пространственной осью; линии 1—2 и 2'—3 — след нормали на магнитной поверхности

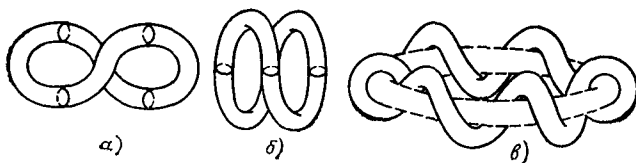


Рис. 2. Стеллараторы с пространственной осью:

а — восьмерка с прямыми участками, б — восьмерка из четырех полуторов; в — многопериодная винтовая система

Рис. 3. Магнитные поверхности двухзаходного стелларатора в разных сечениях плоскостью  $\zeta = \text{const}$ . Силовые линии частично увлекаются во вращение. Концы стрелок — положение выделенной силовой линии (пунктир)

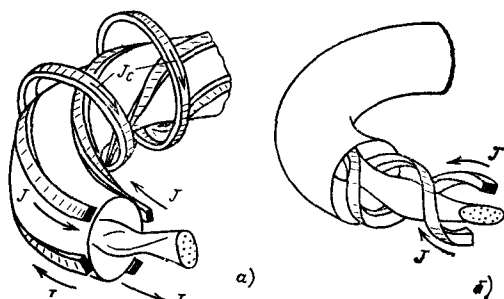
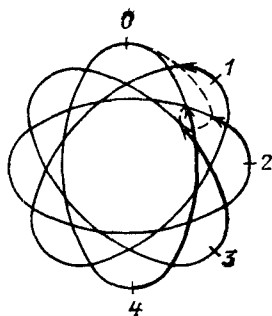


Рис. 4. Стеллараторы с винтовыми обмотками: а — двухзаходный стелларатор; б — торсатрон

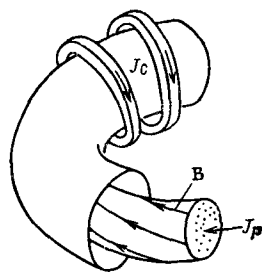


Рис. 5. Схематическое изображение токамака

бому полоидальному контуру в области удержания плазмы равна нулю, магнитные линии за счет квадратичного эффекта перемены наклона испытывают вращательное преобразование (рис. 3, [7]). Этот способ используется в «обычных» стеллараторах с винтовыми обмотками, в том числе в торсатронах и гелиотронах (рис. 4).

Главное преимущество стеллараторов перед токамаками (рис. 5) — возможность стационарной работы без затраты энергии на генерацию тока в плазме. В условиях термоядерного реактора стационарность означает снижение эффекта усталости конструкционных материалов, а следовательно, повышение его долговечности и экономичности. Недостатком стеллараторов является относительная (по сравнению с токамаками) сложность конструкции.

Исследования на стеллараторах до самого последнего времени сосредотачивались фактически на проверке принципов стеллараторных систем. Из-за сложной трехмерной структуры магнитного поля в теории вначале приходилось уделять много внимания исследованию вакуумной магнитной конфигурации стеллараторов [8, 9], движению заряженных частиц в этих системах [10—12] и исследованию процессов переноса в заданной геометрии магнитного поля [13—16]. Подробное изложение этих вопросов содержится в [17].

После недавно осуществленных успешных экспериментов по созданию, нагреву и удержанию бестоковой плазмы в стеллараторах

[18, 19] становится все более актуальным исследование удержания плазмы с реакторными параметрами, т. е. с относительно высоким давлением плазмы (параметр  $\beta = 2\bar{r}/V^2$  должен быть масштаба десятка процентов) и низкой частотой столкновений заряженных частиц, когда переносы начинают определяться плохо удерживаемыми локально запертыми частицами. Тороидальные магнитные системы не имеют большого «запаса прочности» по параметру  $\beta$ . Наоборот, расчеты показывают, что значения  $\beta \sim 10\%$  (по крайней мере в обычных стеллараторах) близки к пределу, при котором нарушаются условия устойчивого равновесия и осуществление которого требует деликатного подбора параметров системы. Выяснение условий осуществления таких значений  $\beta$  требует разработки теории равновесия и устойчивости плазмы в трехмерных магнитных конфигурациях. Различные вопросы теории равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах освещались в обзорах [20, 21], в том числе и в выпусках настоящей серии [9]. Современному состоянию этой теории посвящен и данный обзор. Хотя научные интересы авторов, естественно, не могли не сказаться на выборе и изложении материала, мы стремились по возможности шире охватить имеющиеся результаты.

Обзор построен следующим образом.

В первой главе, имеющей общий описательный характер, дан краткий очерк развития теоретических исследований по стеллараторам. Затем приведено краткое описание основных характеристик удержания плазмы в стеллараторе, изложены принципы, на которых основано равновесие тороидальной плазмы и ее стабилизация, а также пути повышения предельного значения  $\beta$  в стеллараторах. В заключение в этой главе представлены результаты численного исследования равновесия и устойчивости плазмы.

Вторая глава обзора посвящена общему аппарату теоретического исследования равновесия плазмы в трехмерных (т. е. не обладающих осевой и винтовой симметрией) магнитных системах. В предположении существования вложенных тороидальных магнитных поверхностей вводятся связанные с ними координаты и формулируются уравнения равновесия в различных постановках задачи. Если представляет интерес стационарное (с точки зрения диффузии магнитных полей) состояние, то естественно считать заданным тороидальный ток (равный нулю в наиболее интересном для стеллараторов случае). При этом магнитное поле в уравнении равновесия естественно выразить через тороидальный и полоидальный электрические токи (токовое представление). Если равновесие эволюционирует, то естественно выразить магнитное поле через магнитные потоки (потоковое представление). Здесь легко учитывается случай замороженных потоков (быстрое изменение внешних параметров системы) и их диффузия. Как известно, при осевой симметрии уравнения равновесия имеют наиболее простой вид в смешанном представлении, когда тороидальное магнитное поле выражается через полоидальный ток, а полоидальное магнитное поле — через полоидальный магнитный поток (это представление можно назвать «по-

лоидальным»). Полоидальное представление не требует введения контуров, охватывающих магнитную ось, которые необходимы для определения тороидального тока и магнитного потока. Поэтому оно применимо в принципе и для описания разомкнутых магнитных поверхностей. Развитую для токамаков технику решения задач в этом представлении естественно использовать и для стеллараторов. Поэтому уравнения равновесия приведены здесь и в этом представлении.

В третьей главе подробно рассмотрены конфигурации с винтовой симметрией, являющиеся асимптотическим приближением реальных замкнутых стеллараторов с пространственной осью.

Четвертая глава обзора посвящена выводу и анализу различных формулировок двумерного уравнения равновесия плазмы в обычных стеллараторах.

Методы приближенного решения полученных в предыдущих главах двумерных уравнений, а также некоторые частные вопросы (вычисление диамагнитного сигнала в обычных стеллараторах, равновесие с вмороженными потоками, возможность контроля профиля вращательного преобразования и т. д.) рассмотрены в пятой главе.

Наконец, в шестой главе описаны методы исследования МГД-устойчивости плазмы. Здесь приведены выводы критерия Мерсье, уравнения для описания баллонных мод, которые вместе с уравнениями равновесия и определяют предельное значение  $\beta$ . Наряду с необходимыми приведен достаточный критерий устойчивости, выполнение которого обеспечивает устойчивость плазмы относительно произвольных возмущений. Хотя достаточный критерий выполняется лишь при низких значениях  $\beta$ , его наличие демонстрирует лучшую устойчивость плазмы в стеллараторных системах

## Глава 1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ

### 1.1. Развитие теоретических исследований

В теории равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах можно выделить три линии. Первая линия — это получение самых общих соотношений без конкретизации типа рассматриваемых систем (сюда относятся, например, различные формы записи уравнений равновесия, получение общегеометрических достаточных или необходимых критериев устойчивости, анализ расщепления магнитных поверхностей под действием резонансных возмущений и т. д.). Вторая линия — это исследование стеллараторов с винтовыми обмотками (обычные стеллараторы) и третья — теория стеллараторов с пространственной замкнутой осью (сюда относятся системы типа винтотрон, гелиак, дракон и т. д.).

**Общие соотношения.** Общие соотношения между равновесными величинами тороидальной плазмы в магнитном поле, описываемой уравнениями равновесия

$$\nabla p' = [j\mathbf{B}], \quad \mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (1.1)$$

в предположении существования системы вложенных магнитных поверхностей были получены в работе Крускала и Кульсруда 1958 г. [22]. Здесь был введен язык поверхностных величин  $V(a)$ ,  $J(a)$ ,  $\Phi(a)$ ,  $F(a)$ ,  $\psi(a)$  и т. п., где  $a$  — метка тороидальной магнитной поверхности  $a(\mathbf{r}) = \text{const}$ ;  $V(a)$  — объем, ограниченный поверхностью  $a = \text{const}$ ;  $J$  и  $\Phi$  — тороидальные электрический ток и поток магнитного поля, а  $F$  и  $\psi$  — внешние полоидальные ток и поток (по поводу определения этих величин — см. гл. 2). Наряду с  $F(a)$  и  $\psi(a)$  используют также полоидальные ток  $I(a)$  и поток  $\chi(a)$ , отсчитываемые от магнитной оси:

$$I = F_0 - F, \quad \chi = \psi_0 - \psi, \quad (1.2)$$

где  $F_0$  и  $\psi_0$  — значения  $F$  и  $\psi$  на магнитной оси.

Введенные интегральные величины связаны между собой геометрическими соотношениями (см. далее гл. 2) и интегральным уравнением равновесия Крускала — Кульсруда

$$\rho'V' = J'\psi' - F'\Phi', \quad (1.3)$$

обобщающим уравнение равновесия цилиндрического шнура  $\rho'(r) = j_\phi B_z - j_z B_\phi$  на случай произвольных тороидальных конфигураций. Тороидальный поток  $\Phi$  обычно определяют как поток через контур, обходящий вокруг магнитной оси один раз. Полоидальный поток  $\psi$  естественно ввести как поток через контур, вообще не имеющий зацеплений с магнитной осью (как в токамаках). Однако в стеллараторах с прокручивающимися при движении вдоль оси магнитными поверхностями удобно с теоретической точки зрения оперировать с полоидальным потоком через контур, прокручивающийся вместе с сечением (при винтовой симметрии задача в этом случае становится двумерной). Такой поток будем называть геликоидальным. Если число прокручиваний сечения  $i$ , следовательно, число зацеплений соответствующего контура с магнитной осью равно  $N$ , то геликоидальный магнитный поток  $\chi_h = \psi - \psi_0$  отличается от обычного на  $N$  тороидальных потоков. Соответственно вращательное преобразование, рассчитанное по геликоидальному потоку, отличается на целое число  $N$  от обычного. Независимо от этого формула (1.3) является инвариантной, поскольку добавка  $N\Phi'$  к  $\psi'$  в первом члене правой части компенсируется соответствующей добавкой  $NJ'$  к  $F'$  во втором члене. Следует отметить, что при небольших  $N$  (например, в восьмерке Спитцера, где  $N=2$ ) наилучший выбор контура для определения полоидального потока не всегда очевиден. При расчетах следует четко оговаривать, о каком контуре идет речь, так как от выбора его топологии зависит, например, что понимается под первой винтовой модой возмущения.

Задание топологии полоидального и тороидального контуров позволяет ввести криволинейные потоковые координаты  $a$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  так, что нужные магнитные потоки определяются как потоки через контуры, лежащие на соответствующих координатных поверхностях. При этом получаются наиболее простые и естественные представления для магнитного поля (см. гл. 2). Введение специальных по-

токовых криволинейных координат и соответствующего формализма позволило записать «обращенные» уравнения равновесия, где одной из независимых переменных является  $a$ , а неизвестными считаются координаты магнитной поверхности  $g(a, \theta, \zeta)$ . На этом пути в дальнейшем удалось найти различные удобные формулировки уравнений равновесия, пригодные как для приближенного аналитического, так и для точного численного исследования. К ним относятся вариационный принцип и описание равновесия в представлении полоидального тока и потока.

Важным шагом на пути исследования равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах весьма широкого класса стала разработка метода, основанного на представлении функции магнитного потока в аналитической форме в виде разложения по степеням  $\rho$  расстояния от магнитной оси (метод Мерсье) [23—25]:

$$\psi = A(\theta, \zeta)\rho^2 + B(\theta, \zeta)\rho^3 + \dots \quad (1.4)$$

Этот метод является асимптотически точным и позволяет описывать приосевую область любой конфигурации, в том числе обычного стелларатора и стелларатора с пространственной осью. Его применение позволило выявить ряд характерных свойств стеллараторных систем с малым широм, но произвольными эллиптичностью и треугольностью сечений магнитных поверхностей. Основным недостатком этого метода — трудность отделения внутренних параметров от внешних, в частности определения параметров магнитной оси [кривизны  $k(\zeta)$  и кручения  $\kappa(\zeta)$ ], которая в стеллараторах изменяется при заданных внешних условиях под действием токов, вызываемых градиентом давления.

К общим соотношениям в теории устойчивости относится в первую очередь необходимый общегеометрический критерий локальной устойчивости — критерий Мерсье [25—29], а также достаточные общегеометрические критерии [30—32], позволяющие сделать заключение о возможности создания стеллараторной конфигурации, устойчивой относительно любых идеальных МГД-мод. Еще один общий результат теории МГД-устойчивости плазмы — уравнение для баллонных мод возмущений в трехмерных конфигурациях [30—35]. Все эти соотношения приведены ниже в соответствующих главах. Что касается крупномасштабных возмущений, то здесь требуется конкретизация геометрии системы, и никаких общих заключений, помимо упомянутых достаточных критериев устойчивости, по-видимому, сделать нельзя. Реальный прогресс здесь связывается с численными исследованиями устойчивости трехмерных систем. Последнее время в этом направлении ведется интенсивная работа.

Остановимся кратко на физике равновесия плазмы тороидальных систем. Прежде всего о токах в плазме. Естественно, что в стеллараторе, как и в токамаке, можно возбуждать продольный ток с плотностью  $j_0 = \alpha_0(a)\mathbf{B}$ , удовлетворяющей условию  $\text{div } j_0 = 0$ . Этот ток не связан с градиентом давления. При появлении  $\nabla p$  в плазме возникает диамагнитный ток  $j_{\perp} = p'(a)[\mathbf{B}\nabla a]/B^2$  с  $\text{div } j_{\perp} \neq 0$ . Этот «первичный» ток удержания вызывает «вторичный» ток

или ток Пфирша — Шлютера \*  $j_{\parallel} = p' \alpha_1 \mathbf{B} / B^2$ , так что суммарная плотность тока представляется в виде

$$\mathbf{j} = \alpha_0(a) \mathbf{B} + p'(a) \left( \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} + \alpha_1 \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right). \quad (1.5)$$

Будем считать, что среднее по объему магнитного слоя  $\langle \alpha_1 \rangle = 0$ , тогда  $\alpha_0 = \langle \mathbf{j} \mathbf{B} \rangle / \langle B^2 \rangle$ . Для  $\alpha_1$  из условия  $\text{div } \mathbf{j} = 0$  получается уравнение

$$\mathbf{B} \nabla \frac{\alpha_1}{B^2} = -[\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{1}{B^2}. \quad (1.6)$$

Ясно, что равновесие осуществляется благодаря взаимодействию тока  $\mathbf{j}_{\perp}$  с полным магнитным полем  $\mathbf{B}$ . Однако для наглядного представления действующих сил удобнее оперировать с полоидальной и тороидальной составляющими  $\mathbf{j}$ . Первая обеспечивает равновесие «по малому радиусу», а вторая — «по большому радиусу». Силы, действующие по большому радиусу, — это баллонная, равная в случае круговой оси радиусом  $R$   $F_R^{\text{int}} = \int p dV / R$ , где интеграл берется по объему плазмы, и сила взаимодействия тока  $j_{\phi}$  с внешним полем  $F_R^{\text{ext}} = \int j_{\phi} B_z^{\text{ext}} dV$ . В токамаке  $B_z^{\text{ext}}$  — примерно однородное удерживающее поле, так что  $F_R^{\text{ext}} = 2\pi R J B_z^{\text{ext}}$ . В стеллараторе же  $B_z^{\text{ext}}$  — это компонента внешнего усредненного поля винтовых обмоток  $B_z^{\text{ext}} = \bar{B}_{\theta}^{\text{ext}} \cos \theta = B_0 a R^{-1} \mu \cos \theta$ , где  $\mu = -\psi' / \Phi'$  — вращательное преобразование. Это поле взаимодействует с током Пфирша — Шлютера, равным в простейшем случае стелларатора с приблизительно круглым сечением  $j_{\phi} = 2j_{\perp} \cos \theta / \mu$ . Таким образом, можно сказать, что тороидальное равновесие в стеллараторе осуществляется взаимодействием токов Пфирша — Шлютера со стеллараторным магнитным полем.

**Обычные стеллараторы.** Основы теории равновесия и устойчивости плазмы в обычных стеллараторах были заложены в работах принстонских теоретиков (Джонсон и др.) еще в начале 60-х годов [36—41]. В этих работах был разработан подход, основанный на разложении по малым параметрам и сводящий трехмерные уравнения, описывающие тороидальные стеллараторы с винтовыми полями, к двумерным. Как выяснилось уже в 80-е годы, эти упрощенные уравнения — не только удобный, но и достаточно надежный инструмент исследования стеллараторов. Перечислим кратко основные результаты принстонской группы.

В 1961 г. Грином и Джонсоном было получено скалярное двумерное уравнение равновесия плазмы в «обычных» стеллараторах (подробнее — см. гл. 4):

$$\Delta(\psi - \psi_0) = -4\pi^2 R^2 p'(\psi) (1 - 2k\rho \cos u + \Omega^0) - FF'(\bar{\psi}), \quad (1.7)$$

\* Обычно под током Пфирша — Шлютера понимают основную, дипольную компоненту  $\mathbf{j}$ .



аналогичное уравнению Грэда — Шафранова. Входящие в (1.7) величины  $\Omega^0$  и  $\psi_v$ , характеризующие магнитную конфигурацию стелларатора, вычисляются по известному вакуумному полю, после чего постановка задачи равновесия на основе (1.7) и ее решение ничем не отличаются от используемых в теории токамаков. Уравнение (1.7) описывает форму сечений магнитных поверхностей, усредненную по тороидальному направлению. Винтовая структура системы описывается довольно просто при учете дополнительной поправки  $\tilde{\psi}(r, z, \zeta)$  к двумерной функции потока  $\psi(r, z)$ .

Полученное в [37] уравнение (1.7) позволило впервые учесть влияние тороидальности на равновесие в стеллараторах с винтовыми полями. Основным эффектом, связанным с кривизной оси стелларатора, как в токамаках, является смещение магнитных поверхностей наружу от центра кривизны. Важным результатом было обнаружение улучшения устойчивости плазмы при таком смещении [39]. Именно благодаря этому эффекту, как было показано позже другими авторами [42—46], можно надеяться на достижение в стеллараторах с широким высокими значений  $\beta$ .

Техника расчетов в [36—39] была довольно громоздкой, что приводило к необходимости пользоваться упрощающими модельными представлениями, особенно при рассмотрении трехзаходных стеллараторов [39]. Здесь еще не был использован удобный способ описания равновесия на языке параметра  $\Delta$  — смещения центра магнитной поверхности относительно геометрической оси.

Введение  $\Delta$ , как было показано в [47] для токамака, существенно упрощает описание тороидальных конфигураций, поскольку все тороидальные поправки к полям и токам в плазме выражаются непосредственно через  $\Delta$ . Первые такой подход при решении (1.7) был применен в работе [40], завершающей первый цикл работ принстонских теоретиков по стеллараторам (см. обзорную статью [41]). Здесь получено линейное уравнение для смещения  $\Delta$  с учетом винтовых полей и численным решением этого уравнения показано, что в стеллараторе с достаточно большим магнитным бугром  $V''(\Phi)$  ( $V$  — объем,  $\Phi$  — продольный поток магнитного поля внутри магнитной поверхности) существует предел на  $\beta$ : при давлении плазмы выше критического равновесие становится неустойчивым относительно смещения плазмы как целого. Этот предел проявляется лишь при очень большом аспектном отношении, когда вклад кривизны в  $V''(\Phi)$  мал; с ним, вероятно, связана неустойчивость плазмы в тороидальном  $\theta$ -пинче «Сциллак». Для существующих стеллараторов этот предел не возникает [48, 49].

Использование стеллараторного приближения [37, 41] позволило упростить не только уравнения равновесия, но и функционал энергии для крупномасштабных идеальных возмущений. Полученный в [38] редуцированный двумерный функционал послужил впоследствии основой при анализе устойчивости винтовых мод со свободной границей в бестоковом стеллараторе [50].

Заметное влияние на развитие теории стеллараторов оказала концепция стабилизации плазменных неустойчивостей «магнитной

ямой». Она возникла под влиянием успешных опытов М. С. Иоффе и др. [51] по стабилизации плазмы в ловушке с магнитными пробками при создании в ней абсолютного минимума  $B$ , что соответствует вогнутым по отношению к плазме магнитным силовым линиям.

В замкнутых тороидальных системах обязательно есть участки с выпуклыми магнитными силовыми линиями (в токамаке — на внешнем обводе тора) и поэтому абсолютного минимума  $B$  не может быть. Отметим, что, говоря о минимуме  $B$ , следует иметь в виду не модуль  $\mathbf{B}$  при наличии плазмы, а модуль вакуумного магнитного поля, точнее, модуль  $\mathbf{B}^2$  за вычетом диамагнитного ослабления поля при наличии плазмы. В большинстве случаев это соответствует просто минимуму суммы  $\mathbf{B}^2 + 2p$ . Именно знак градиента этой величины определяет знак кривизны силовой линии, так как согласно уравнению равновесия

$$\nabla(p + \mathbf{B}^2/2) = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}, \quad (1.8)$$

вектор кривизны силовой линии

$$\mathbf{k} = \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}}{B^2} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla B^2/2)}{B^4} \quad (1.9)$$

можно выразить в виде

$$\mathbf{k} = \nabla_{\perp}(2p + \mathbf{B}^2)/(2B^2), \quad (1.10)$$

где  $\nabla_{\perp} = \nabla - \mathbf{B}(\mathbf{B}\nabla)/B^2$ .

Из общих теоретических исследований по МГД-устойчивости плазмы было видно, что по крайней мере для плазмы низкого давления стабилизирующим фактором служит средний по силовой линии минимум  $B$ :  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle = \int \mathbf{B}^2 (dl/B) / \int (dl/B)$ , что в тороидальных системах соответствует среднему по магнитному слою  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle = \int \mathbf{B}^2 d\tau / dV$ . В бестоковой системе эта величина может быть выражена в виде  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle = F/V'(\Phi)$ . Внешний относительно магнитной поверхности, ограничивающей объем  $V$ , ток  $F$ , создающий тороидальный поток  $\Phi$ , можно считать при малом давлении плазмы постоянным. Таким образом, минимуму  $B$  соответствует условие  $V''(\Phi) < 0$ . Отсюда вытекает, что стабилизация за счет «минимума  $B$ » или отрицательной  $V''(\Phi)$  возможна и в системах со знакопеременной кривизной магнитных силовых линий. Впервые возможность создания среднего минимума  $B$  в системах с вращательным преобразованием была продемонстрирована в работе Джонсона и др. [39]. Примененная в ней сложная техника расчета не позволила сделать выводы работы убедительными. Ясная демонстрация возможности создания среднего минимума  $B$  была дана после опытов М. С. Иоффе Фюртом и Розенблуттом [52] для системы с чередующимися квадрупольными элементами. Здесь вдоль системы, которая может быть прямолинейной, одновременно меняются напряженность магнитного поля  $B_0(s)$  и эллиптичность сечений магнитных поверхностей

$$\varepsilon(s) = \text{th } \eta = (b^2 - a^2)/(b^2 + a^2), \quad (1.11)$$

где  $b$ ,  $a$  — полуоси эллипса. В этом случае для получения значения  $V''(\Phi)$  в приосевой области достаточно учесть в параксиальном приближении лишь квадратичные по  $\rho$  члены в выражениях для  $V$  и  $\Phi$ . При этом

$$V''(\Phi) = \int \frac{ds}{B_0} - \frac{\Phi}{\pi} \int \frac{ds}{B_0^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left( -\frac{3}{4} \frac{B_0'^2}{B_0^2} - \frac{\eta'^2}{2} + \varepsilon \frac{\eta' B_0'}{B_0} \right). \quad (1.12)$$

В работах [53, 54] этот же принцип создания ямы был рассмотрен в прямолинейных системах с вращательным преобразованием. Получить достаточно глубокий минимум  $V$  таким способом не удается. К тому же требуемая неоднородность  $B_0(s)$  не благоприятна в отношении переносов.

В тороидальных системах средний минимум  $V$  может быть создан смещением магнитной оси относительно граничной магнитной поверхности в область ослабленного тороидального поля, т. е. от центра кривизны оси. В работе Тэйлора [55] было показано, что сместить ось в стеллараторах для получения минимума  $V$  можно наложением однородного вертикального к плоскости тора магнитного поля.

В отличие от шира — грубой характеристики системы средняя магнитная яма, будучи разностным эффектом, является более тонкой характеристикой системы. Чтобы понять, от каких параметров она зависит, необходима высокая точность расчетов. Точные расчеты  $V''(\Phi)$  в окрестности магнитной оси с учетом кривизны (для чего необходим учет членов порядка  $\rho^3$ ) был выполнен в [9, 56, 57]. Это позволило на основе необходимого критерия устойчивости Мерсье уточнить ограничения на давление плазмы в бесшировом двухзаходном стеллараторе [32]. Одним из существенных результатов последней работы было уяснение того, что диамагнитное углубление ямы не влияет на устойчивость. Ранее для желобковых возмущений получали критерий устойчивости  $\rho'(2\rho + \langle \mathbf{B}^2 \rangle)' < 0$ , что при  $\rho' < 0$  приводило к условию  $2\rho' + \langle \mathbf{B}^2 \rangle' > 0$ . Из него делали вывод, что критическое  $\beta$  определяется относительной глубиной вакуумной магнитной ямы (см., например, [58, 30]),  $\beta_c = \delta \langle \mathbf{B}_v^2 \rangle / \langle \mathbf{B}_v^2 \rangle$ , поскольку расчет выполнялся при  $\beta \rightarrow 0$ , когда считалось  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_v$ . В [24, 32, 59] показано, что приближенно можно считать  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle = \langle \mathbf{B}_v^2 \rangle - 2\rho$ , так что условие  $(2\rho + \langle \mathbf{B}^2 \rangle)' > 0$  сводится к условию, не содержащему давления плазмы,  $\langle \mathbf{B}_v^2 \rangle' > 0$ , и из него нельзя определить  $\beta_c$ . Аккуратные расчеты для плазмы конечного давления [32] показали, что в стеллараторе с круговой осью при малой эллиптичности сечений ( $\varepsilon^2 \ll 1$ ) критическое давление связано с относительной глубиной магнитной ямы  $\delta\omega/\omega$  ( $\omega = \langle \mathbf{B}^2 \rangle + 2\rho$ ) соотношением

$$\beta_c = (\delta\omega/\omega) \mu^2/\varepsilon^2, \quad (1.13)$$

где  $\mu = -\psi'/\Phi'$  — вращательное преобразование, и, как следует из оценок, может составлять до десятка процентов. Более того, в [60] показано, что и достаточный критерий устойчивости относительно

произвольных МГД-возмущений дает хотя и меньшее, но конечное значение  $\beta_c$ :

$$\beta_c = \frac{1}{2} \frac{\delta\omega}{\omega} \mu^2.$$

В более позднем анализе Лортца и Нюренберга [61, 62] сделан иной, пессимистический вывод о том, что предельное  $\beta$  в стеллараторах очень низкое:  $\beta_c < 0,66\%$ . Наше объяснение расхождений выводов [61, 62 и 32] следующее.

В [32] решалась задача с фиксированной граничной магнитной поверхностью. Разложение по степеням  $\rho$  делалось фактически относительно геометрической оси системы. При заданной границе параметры магнитной оси меняются с давлением плазмы (ось закручивается в винт) и с такой осью нельзя связать систему координат. Фактически в [32] рассматривается область, примыкающая к границе, где изменения геометрии оси не сказываются. Эта область занимает основной объем плазмы и представляет наибольший интерес. Узкая область в окрестности винтящейся магнитной оси практически не может иметь значения из-за малого объема приосевой области.

Что же касается работ [61, 62], то в них магнитная ось фиксировалась заданием кривизны  $k(\zeta)$  и кручения  $\kappa(\zeta)$ . С изменением давления менялась граничная поверхность плазмы. Давление входит в коэффициенты перед членами с  $\rho^3$ , которые определяют сепаратрису. Ее поперечный размер уменьшается с ростом градиента давления. Поскольку условие устойчивости фиксирует градиент давления, то уменьшение размера означает уменьшение  $\beta$ . Исследование всего множества параметров, характеризующих равновесие в параксиальном приближении, привело к пределу  $\beta_c = 0,66\%$ , кающемуся, на первый взгляд, непреложным. Но если рассмотреть наружную область, далекую от сепаратрисы, то, по нашему мнению, в ней возможны гладкие поверхности, охватывающие приосевую «розеточную» структуру, которые опять хорошо описываются представлением  $\psi = A(\theta, \zeta)\rho^2 + B(\theta, \zeta)\rho^3$ . Эту область не могли рассмотреть Лортц и Нюренберг, но именно эта внешняя область, определяемая внешними граничными условиями, а не «легкомысленной» магнитной осью, и рассматривалась в [32]. Поэтому вывод этой работы имеет большее отношение к реальности, чем вывод работ [61, 62].

Рассмотрение бесшировых систем прояснило многое в физике равновесия и устойчивости обычных стеллараторов. В частности, оно позволило установить эффект самостабилизации плазмы, связанный с углублением магнитной ямы при увеличении давления вследствие относительного смещения магнитных поверхностей [63, 64] (баллонные растяжения тороидальной плазмы) и появления слабой эллиптичности. Но сами эти системы не представлялись перспективными из-за топологической неустойчивости — даже малые резонансные возмущения, в том числе связанные с давлением плазмы, приводят к островной структуре и ухудшению удержания.

Поэтому в 80-е годы происходит вновь активизация теоретических исследований стеллараторов с широм. В эти годы независимо несколькими группами исследователей были, по существу, заново рассмотрены вопросы равновесия и устойчивости плазмы в обычных стеллараторах. Сначала с использованием метода обращения переменных [65—67] и метода усреднения [42, 68, 69] были получены в стеллараторном приближении новые формулировки двумерного уравнения равновесия Грина — Джонсона (1.7). В дальнейшем двумерное уравнение для функции полоидального потока было обобщено на случай большой [70] и произвольной [71] тороидальности.

Одновременно исследовалась устойчивость локальных мод на основе общегеометрического необходимого критерия устойчивости Мерсье и на основе уравнения для баллонных мод. При этом обнаружилось два эффекта, благоприятных для устойчивости: 1) при типичном для стеллараторов положительном шире (растущее от оси вращательное преобразование) в критерии устойчивости слабое, соответствующее баллонному эффекту, — положительное (в отличие от токамака), так что баллонные моды не ограничивают давления; 2) положительный шир благоприятен для стабилизации: под действием поперечного поля внутренние поверхности смещаются сильнее наружных, что соответствует углублению магнитной ямы (об этом упоминалось еще в [39]). В результате эффект самостабилизации проявляется уже в линейном (а не в квадратичном, как в бесшировых системах) приближении по градиенту давления.

В результате этих двух эффектов локальные моды не ограничивают давления плазмы в стеллараторах с положительным широм. Эти выводы были подтверждены численными расчетами [72].

Что касается нелокальных крупномасштабных мод, то для них, как и в бесшировых системах, справедливо достаточное условие устойчивости  $\beta < \beta_c = \mu^2 \delta w / (2w)$ . Вопрос о более высоком пределе требует конкретных расчетов. С этой целью используются трехмерные коды — наиболее развитый код ВЕТА (или ВВГ) (Бауер, Бетанкур, Гарабедян) [73, 74], основанный на минимизации потенциальной энергии плазмы, и др. [50, 69, 75, 76]. Интерпретация результатов численного счета часто требует большой осторожности. Например, авторам [74] не удалось получить  $\beta > 3\%$  для стеллараторов с  $\mu < 1$ , в то время как расчеты [76] для ATF давали более высокие оценки  $\beta$ . Поэтому задача исследования МГД-устойчивости продолжает оставаться актуальной.

**Стеллараторы с пространственной осью.** К третьей линии развития относится теория стеллараторов с пространственной осью (типа спитцеровской восьмерки [1, 2]). Теория равновесия таких систем в приближении круглых магнитных поверхностей была развита в [77, 78] (метод разложения по кривизне, аналогичный методу, использованному при первых исследованиях токамаков [79]). В дальнейшем в [36, 80], где для расчета равновесия использовался метод разложения по степеням расстояния от магнитной оси, было показано, что устойчивость по Мерсье в бесшировой системе

при наличии вакуумной магнитной ямы не накладывает серьезных ограничений на давление плазмы. Магнитная яма в таких системах может быть создана приданием каплеобразной (с острием, направленным внутрь тора) [57] или D-образной [56] формы магнитным поверхностям. D-образная форма представляется более привлекательной, так как плазма высокого давления сама способствует ее образованию. В многопериодных системах с пространственной осью магнитная яма определяется не кривизной тора, а локальной кривизной; такие системы поэтому могут иметь магнитную яму и при большом общем аспектном отношении. В этом их принципиальное преимущество перед обычными стеллараторами. Для многопериодных стеллараторов с пространственной осью часто используется приближение винтовой симметрии, когда задача становится двумерной и легко может быть решена численно. Проведенные в таком приближении численные исследования равновесия и устойчивости показали, что в системах с винтовой осью достижимы предельные по равновесию и локальной устойчивости значения  $\beta$  до 30 % [81, 82].

Высокие предельные по равновесию и устойчивости локальные значения  $\beta$  характерны для конфигураций с малым широм при наличии вакуумной магнитной ямы (обеспечиваемой здесь D-образной формой сечения магнитных поверхностей). Такие же высокие значения  $\beta$  получают и для токамака с той же формой сечения и такой же кривизной оси. Однако в токамаке есть дополнительные винтовые неустойчивости, связанные с током, которые и приводят к снижению общего уровня  $\beta$  примерно до 4—5 %.

Интерес к системам с пространственной осью повысился в связи с предложением простой конструкции винтового тора (система гелиак [6]) и с развитием идеи системы дракон [5].

Из-за большей своей громоздкости системы с пространственной осью могут представлять интерес как системы с высоким  $\beta$  лишь в отдаленной перспективе. В настоящее время основное внимание сосредоточено пока на более компактных (хотя и с меньшими предельными  $\beta$ ) обычных стеллараторах с прокручивающимся некруглым сечением магнитных поверхностей.

## 1.2. Основные параметры стеллараторов

Вакуумное магнитное поле обычного стелларатора состоит из двух частей — тороидального поля  $\mathbf{B}_T = B_0 R \nabla \zeta$  и винтового поля  $\mathbf{B}_h = \nabla \varphi_h$ :

$$\mathbf{B} = B_0 R \nabla \zeta + \nabla \varphi_h. \quad (1.14)$$

Здесь  $B_0$  — поле на оси тора;  $2\pi R$  — длина оси;  $\zeta = s/R$ , где  $s$  — длина дуги оси. При достаточно большом аспектном отношении для  $\varphi_h$  можно использовать цилиндрическое приближение

$$\varphi_h = \sum_{l, m} B_0 \varepsilon_{lm} \frac{Rl}{m} I_l \left( \frac{mr}{R} \right) \sin(l\omega - m\zeta). \quad (1.15)$$

Обычно в стеллараторах преобладает одна гармоника винтового поля с относительной амплитудой  $\epsilon_{lm}$ . В этом случае основными магнитными параметрами являются мультипольность  $l$ , амплитуда  $\epsilon_{lm}$  и «крутизна» винтового поля  $mb/R$  ( $b$  — радиус плазменного шнура). Аспектное отношение  $A=R/b$  и параметры, характеризующие форму граничной магнитной поверхности (усредненные по длине смещение центра сечения  $\Delta$ , эллиптичность  $\alpha$  и т. д.), будем называть геометрическими параметрами. Системы с  $mb/R \ll 1$ , т. е. с шагом винтового поля, большим по сравнению с радиусом плазмы, будем называть длиннопериодными, а с  $mb/R \gtrsim 1$  — короткопериодными.

Конфигурация стелларатора с пространственной осью определяется кривизной  $k(\xi)$  и кручением  $\kappa(\xi)$  магнитной оси, а также формой граничной магнитной поверхности.

Наиболее важными характеристиками стеллараторов являются:

а) вращательное преобразование  $\mu = -d\psi/d\Phi = dx/d\Phi = \mu_{st} + \mu_j$ , состоящее из собственно стеллараторного вращательного преобразования  $\mu_{st}$ , определяющегося лишь формой магнитных поверхностей, и токового вращательного преобразования  $\mu_j$ ;

б) глобальный шир магнитных силовых линий  $s(a) = a\mu'(a)/\mu = -aq'(a)/q$ , где  $q(a) = 1/\mu(a)$  — коэффициент запаса устойчивости по терминологии токамаков;

в) величина, характеризующая зависимость среднего по магнитной поверхности квадрата напряженности вакуумного магнитного поля от радиуса магнитной поверхности. Часто в качестве такой величины используют вторую производную от объема по продольному магнитному потоку  $V''(\Phi)$ . Поскольку в стеллараторном приближении поле, создаваемое продольным током, мало, то  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle = F/V'(\Phi)$  и для вакуумного случая ( $F = \text{const}$ )  $V''(\Phi) = -F\langle \mathbf{B}^2 \rangle_{\Phi}' / \langle \mathbf{B}^2 \rangle^2$ . При  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle' > 0$  ( $V''(\Phi) < 0$ ) конфигурация имеет магнитную яму, а при  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle' < 0$  ( $V''(\Phi) > 0$ ) — магнитный бугор. Из выражения для нормальной кривизны магнитных силовых линий (в вакууме)  $k_n = -\nabla a \nabla \mathbf{B}^2 / 2\mathbf{B}^2 |\nabla a|$  следует, что условие  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle' > 0$  соответствует отрицательной средней кривизне магнитных силовых линий. Как уже отмечалось, при наличии плазмы вместо  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle'$  в критерии устойчивости входит величина  $\omega' = (2p + \langle \mathbf{B}^2 \rangle)'$  (см. гл. 6);

г) предельные по равновесию ( $\beta_{eq}$ ) и устойчивости ( $\beta_{st}$ ) значения параметра  $\beta$ .

В пренебрежении кривизной оси для обычного стелларатора с одной гармоникой винтового поля при  $p' = 0$  можно написать простые выражения для стеллараторного вращательного преобразования  $\mu_{st} = \mu_h$  и величины  $V_{\infty}''(\Phi)$  (здесь индексы 0 и  $\infty$  означают нулевое давление, т. е. постоянство  $F$ , и пренебрежение кривизной, т. е. большое аспектное отношение  $A$ ) в двух различных приближениях. Так, для длиннопериодного ( $mb/R \ll 1$ ) двухзаходного стелларатора с произвольной эллиптичностью сечения  $\epsilon_2 = (a_1^2 - a_2^2)/(a_1^2 +$

$+a_2^2$ ), где  $a_1, a_2$  — полуоси эллиптического сечения [9],

$$\mu_h = (m/2) \left( 1 - \sqrt{1 - \varepsilon_2^2} \right); \quad (1.16)$$

$$V_{0\infty}''(\Phi) = m^2 \varepsilon_2^2 / (B_0^2 \sqrt{1 - \varepsilon_2^2}). \quad (1.17)$$

Эллиптичность  $\varepsilon_2$  совпадает с относительной амплитудой винтового поля в формуле (1.15).

Простые выражения можно получить и при произвольных  $mb/R$ , но малых  $\varepsilon$  [37]:

$$\mu_h(a) = \varepsilon_{lm}^2 \frac{m l^3}{4u} \frac{d}{du} \left( \frac{1}{u} \frac{dl_l^2(u)}{du} \right), \quad u = \frac{ma}{R}; \quad (1.18)$$

$$V_{0\infty}''(\Phi) = \frac{m}{l R a^3 B_0^2} \frac{d}{da} [\mu_h(a) a^4]. \quad (1.19)$$

В длиннопериодном пределе ( $u \ll 1$ ) из (1.18) следует

$$\mu_h = m \varepsilon_{lm}^2 \frac{l^2}{2^{2l} (l-1)! (l-2)!} \left( \frac{ma}{R} \right)^{2(l-2)}. \quad (1.18a)$$

В стеллараторе с пространственной осью в приближении круглых магнитных поверхностей указанные величины имеют следующие выражения [9]:

$$\mu_{st} = \mu_{\kappa}(a) = \frac{1}{2\pi} \oint \left( 1 + \frac{5}{32} k^2 a^2 \right) \kappa ds; \quad (1.20)$$

$$V_0''(\Phi) = \bar{k}^2 L / (\pi B_0^2). \quad (1.21)$$

Из приведенных формул видно, что как прямолинейный обычный стелларатор, так и стелларатор с пространственной осью и круглыми магнитными поверхностями имеют магнитный бугор. Тем не менее за счет кривизны необходимая для обеспечения устойчивости плазмы магнитная яма может быть создана и в тех, и в других системах. С учетом кривизны геометрической оси в выражении  $V_0''(\Phi)$  появляется дополнительное слагаемое:

$$V_0''(\Phi) = V_{0\infty}''(\Phi) - \frac{2}{a B_0^2} [\langle r \cos \omega \rangle_{\theta, \xi}]'_a. \quad (1.22)$$

Здесь  $r, \omega, \xi$  — квазицилиндрические, а  $a, \theta, \xi$  — потоковые координаты с выпрямленными силовыми линиями. Связанная с кривизной добавка в  $V_0''(\Phi)$  зависит от формы магнитных поверхностей. Для расчета конфигураций с магнитной ямой в обычном стеллараторе достаточно приближения круглых магнитных поверхностей, которое дает

$$V_0''(\Phi) = V_{0\infty}''(\Phi) + \frac{2\mu_h' \Delta'}{\mu_h B_0^2} + \frac{(\mu_h' a^3)'}{B_0^2 \mu_h a^3} \Delta, \quad (1.23)$$

где  $\Delta$  — смещение центра магнитной поверхности относительно гео-



метрической оси; смещение наружу от центра кривизны соответствует  $\Delta < 0$ . Используя (1.18), (1.19), легко показать, что при  $u \ll 1$  вблизи магнитной оси  $l=2$  стелларатора магнитная яма создается при  $-\Delta/a \geq \epsilon_2^2 A/8$ .

Магнитную яму за счет локальной кривизны можно создать и в системе с винтовой симметрией. Однако в отличие от обычных стеллараторов простого смещения магнитных поверхностей здесь недостаточно — необходимы еще эллиптичность и треугольность сечений магнитных поверхностей [56, 57].

### 1.3. Удержание плазмы в стеллараторах с пространственной осью

**Равновесие плазмы.** а) Равновесие в системе с винтовой симметрией. В теории стеллараторов с пространственной осью большое внимание уделяется системам с винтовой симметрией, поскольку они являются достаточно хорошим приближением для замкнутых систем, причем даже при не слишком большом числе периодов [83, 84]. Подробно равновесие плазмы в таких системах рассмотрено в гл. 3 и 5. Здесь же этот вопрос рассмотрен лишь качественно.

Основные параметры винтовой оси — радиус опорного цилиндра  $r_0$  и шаг винта  $\lambda$  ( $\lambda = \lambda/2\pi$ ). Кручение и кривизна оси выражаются через них следующим образом:

$$\kappa = \frac{\lambda}{r_0^2 + \lambda^2} = \frac{\sin \gamma}{R_h}; \quad k = \frac{r_0}{r_0^2 + \lambda^2} = \frac{\cos \gamma}{R_h}, \quad (1.24)$$

где  $\text{tg } \gamma = \lambda/r_0$ ;  $2\pi R_h = 2\pi \sqrt{r_0^2 + \lambda^2}$  — длина одного периода винтовой оси.

Вращательное преобразование связано с  $\kappa$  и  $k$  соотношением (1.20). Как показано в [77, 78], предельное по равновесию давление плазмы дается при круглых поверхностях соотношением

$$\beta_{\text{eq}} \approx \frac{\kappa^2 b}{k} = \frac{b}{R_h} \frac{\sin^2 \gamma}{\cos \gamma} \quad (1.25)$$

которое можно записать в более привычном виде:

$$\beta_{\text{eq}} \approx \mu^2 b/R_h. \quad (1.26)$$

Из (1.24), (1.25) видно, что с уменьшением шага винта  $\lambda$  предельное по равновесию давление плазмы стремится к нулю (винт переходит в тор без вращательного преобразования). С увеличением же  $\lambda$  равновесное  $\beta$  растет, поскольку кривизна стремится к нулю. При замыкании такой системы, она, очевидно, снова переходит в тор с нулевым вращательным преобразованием ( $\kappa=0$ ), что снова означает потерю равновесия. Ясно, что в отношении равновесия плазмы в замкнутом стеллараторе с пространственной осью существует некоторый оптимальный угол наклона винта  $\gamma$ . Поясним особенности замкнутых систем простым примером.

б) Замкнутый стелларатор. Рассмотрим конфигурации, ось которых представляет собой в некотором смысле простейшую замкнутую кривую из семейства «спирэлей» (спиралей элементарных) [85]. Такие пространственные кривые удобно характеризовать не локальными кривизной и кручением, а комплексной кривизной

$$K(\zeta) = k(\zeta) \exp[i(\kappa_0 \zeta - \alpha(\zeta))], \quad (1.27)$$

где  $\alpha(\zeta) = \int \kappa(\zeta) d\zeta$ , а  $\kappa_0$  выбирается из условия периодичности:

$$\kappa_0 = \alpha(2\pi)/(2\pi) + M. \quad (1.28)$$

В (1.28)  $M$  — целое число.

Кривые, комплексная кривизна которых содержит только два члена разложения Фурье

$$K(\zeta) = k_0 + k_n \exp(i n \zeta), \quad (1.29)$$

и названы спирэлями [85].

Параметры  $k_0$ ,  $k_n$  при заданных  $n$ ,  $\kappa_0$  однозначно определяются (численно) из условия замыкания кривой, а кривизна и кручение выражаются через  $k_0$ ,  $k_n$  следующим образом:

$$k(\zeta) = \sqrt{k_0^2 + k_n^2 + 2k_0 k_n \cos(n\zeta)}; \quad (1.30)$$

$$\kappa(\zeta) = \kappa_0 - (n/k^2)(k_n^2 + k_0 k_n \cos(n\zeta)). \quad (1.31)$$

Каждый из коэффициентов  $k_0$  и  $k_n$  вносит свой вклад в эффекты, связанные с кривизной. Например, смещение дрейфовых магнитных поверхностей вдоль радиуса имеет вид [20]:

$$d = r_H \left( \frac{k_0}{\kappa_0} \cos \omega + \frac{R^n}{\kappa_0 - n} \cos(\omega + n\zeta) \right), \quad (1.32)$$

где  $\omega$  — угол, отсчитываемый от главной нормали, а  $r_H = mcv_{\parallel} / eB_0$ . Максимальное смещение можно записать в виде  $d_{\max} = r_H q_1$ , где

$$q_1 = k_0/\kappa_0 + k_n/(n - \kappa_0). \quad (1.33)$$

Коэффициент увеличения диффузии Пфирша — Шлютера состоит соответственно из двух слагаемых

$$q_3^2 = k_0^2/\kappa_0^2 + k_n^2/(n - \kappa_0)^2. \quad (1.34)$$

Максимальная амплитуда смещения центра магнитной поверхности радиусом  $a$  относительно поверхности радиусом  $b > a$  дается выражением

$$\Delta = (L/4\pi a) (1 - a^2/b^2) \beta q_2^2, \quad (1.35)$$

где

$$q_2^2 = k_0/\kappa_0^2 + k_n/(n - \kappa_0)^2. \quad (1.36)$$

В качестве примера на рис. 6 показаны зависимости от  $\kappa_0$  коэффициентов  $q_1$ ,  $q_2^2$ ,  $q_3^2$  для  $n=3$ . Здесь изображены также две проекции соответствующих замкнутых кривых. Как видно из этого рисунка,

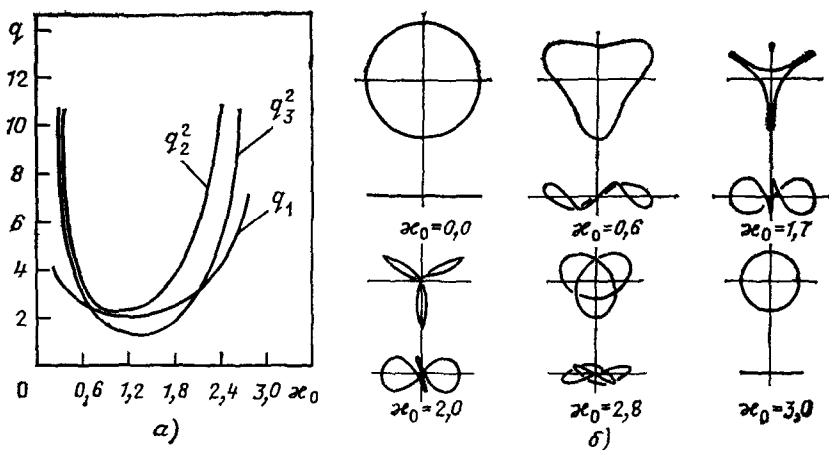


Рис. 6 Влияние параметра  $\kappa_0$  на форму спирэлей и на удерживающие свойства «спирэльных» конфигураций:

$a$  — зависимость параметров  $q_i$  от  $\kappa_0$ ;  $b$  — две проекции (вид сверху и сбоку) спирэлей с  $n=3$  при различных значениях  $\kappa_0$

при  $\kappa_0=0$  и  $\kappa_0=n$  спирэль переходит в окружности, обходимые 1 и 2 раза соответственно. Поведение кривых  $q_1(\kappa_0)$ ,  $q_2^2(\kappa_0)$ ,  $q_3^2(\kappa_0)$  и отражает факт потери равновесия в этих предельных случаях. Минимумы кривых смещены влево. При  $n \gg 1$  минимумы достигаются при  $\kappa_1 = (2n)^{1/3}$ ,  $\kappa_2 = n^{1/5}$ ,  $\kappa_3 = n^{1/3}$ .

в) Система дракон. Система дракон (рис. 7) состоит из прямолинейных частей с чисто продольным магнитным полем, которые замыкаются специальными «криволинейными равновесными элементами» (КРЭЛами). Параметры КРЭЛа выбирают так, чтобы вторичные токи полностью замыкались внутри его и не выходили в прямолинейные участки [5]. Так как прямолинейные части при этом не возмущаются, предельное давление плазмы определяется только КРЭЛом. Снижение напряженности магнитного поля в прямых частях позволяет заметно повысить эффективное  $\beta$  системы. Идею КРЭЛа легко пояснить на примере соленоида, состоящего из трех полуторов, плоскости которых образуют угол  $\alpha$ . Для компенсации токов Пфирша — Шлютера необходимо, чтобы интеграл

$$U = \int dl/B \quad (1.37)$$

был одинаков для всех магнитных силовых линий, соединяющих сечения магнитных поверхностей на концах КРЭЛа. В каждом полуторе с кривизной  $k$  имеем  $B = B_0/(1-kx)$ ,  $dl = R(1-kx)d\xi$ , где  $x$  — проекция полярного радиуса  $r$  силовой линии магнитного поля на главную нормаль  $n$  оси. Для выбранной силовой линии угол между  $n$  и  $r$  равен  $\omega$  в первом полуторе,  $\omega + \alpha$  во втором и  $\omega + 2\alpha$  в третьем. Тогда в линейном по  $kx$  приближении, которое достаточно

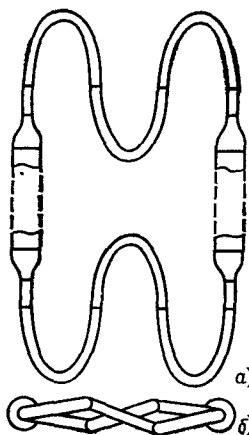


Рис. 7. Схематическое изображение системы дракона с крэлами из трех полуторов:  
*а* — вид сверху; *б* — вид сбоку

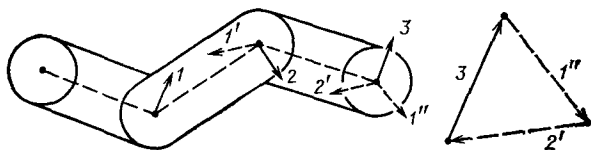


Рис. 8. Диаграмма дрейфа пролетных частиц в крэле из трех полуторов. Сплошными стрелками 1—3 показано смещение частицы после прохождения каждого полутора. Перенос этих смещений при следовании вдоль системы показан пунктирными стрелками 1', 1'' и 2'

для рассматриваемого магнитного поля,

$$U = (\pi R/B_0) [3 - 2kr (\cos \omega + \cos(\omega + \bar{\alpha}) + \cos(\omega + 2\bar{\alpha}))]. \quad (1.38)$$

Для того чтобы это выражение не зависело от начального азимута  $\omega$  магнитной силовой линии, должны быть выполнены условия

$$1 + \cos \bar{\alpha} + \cos 2\bar{\alpha} = 0; \quad \sin \bar{\alpha} + \sin 2\bar{\alpha} = 0, \quad (1.39)$$

которые, очевидно, удовлетворяются при  $\bar{\alpha} = 120^\circ$ .

Векторная диаграмма (рис. 8) [20] иллюстрирует замыкание дрейфов, вызывающих вторичные токи. Заряженные частицы, движущиеся вдоль первого полутора, дрейфуют в направлении, перпендикулярном тороидальной плоскости. Во втором полуторе они сдрейфовывают на то же расстояние, но под углом в  $120^\circ$  к первоначальному. В третьем полуторе направление дрейфа снова изменяется на  $120^\circ$  и вектор дрейфа замыкается сам на себя. Таким образом, проходя через КРЭЛ, частицы возвращаются на свой первоначальный азимут.

Интерес могут представить и более сложные КРЭЛы. Так, состоящий из пяти полуторов КРЭЛ, как показано в [86], может обеспечить не только прямизну силовых линий на выходе, но и концентричность сечений магнитных поверхностей. Этим обеспечивается совпадение магнитных поверхностей с дрейфовыми  $V^2 = \text{const}$  на прямолинейных участках и тем самым отсутствие дополнительных «неоклассических» переносов.

В более общем случае систем с произвольной кривизной и неоднородным полем  $B_0(s)$  условие замыкания при близких к круглым сечениям магнитных поверхностей в параксиальном приближении имеет вид

$$\int_0^{1/2} \frac{k(s) \cos(2\pi\mu(s))}{B_0^{3/2}(s)} ds = 0. \quad (1.40)$$

Здесь  $l$  — длина КРЭЛа (предполагается, что он имеет ось симметрии второго порядка, проходящую через точку  $s=0$ );  $2\pi\mu(s)$  — текущий угол вращательного преобразования. При однородном магнитном поле и постоянной кривизне это условие может быть выполнено, если вращательное преобразование на половине длины КРЭЛа равно  $\pi$  ( $4\pi$  на всей длине системы). Если же вращательное преобразование невелико и  $\cos(2\pi\mu(s))$  не меняет знака, кривизна должна быть знакопеременной, а магнитное поле — неоднородным. Например, при  $k=k_0(1+k_1 \cos N\xi)$ ,  $B=B_0(1-b_1 \cos N\xi)^{-2}$  условие (1.40) удовлетворяется на каждом периоде, если  $3b_1=2/k_1$ . Фактически условие (1.40) является математическим выражением предложенной Л. Спитцером на заре термоядерных исследований концепции скэллопса [1, 2].

**Устойчивость плазмы в стеллараторах с пространственной осью.** Условие устойчивости локальных мод возмущений в стеллараторах с пространственной осью, имеющих малый шир, сводится к критерию Мерсье [87]. Из критерия Мерсье следует, что для устойчивости плазмы такие системы должны иметь геометрическую магнитную яму, т. е.  $V_0''(\Phi)$  — связанная с геометрией магнитных поверхностей часть  $V''(\Phi)$  — должна быть отрицательной. Условия образования магнитной ямы в вакуумных конфигурациях можно уяснить из рассмотрения выражения для  $V_0''(\Phi)$ , полученного методом разложения по степеням расстояния от магнитной оси. На магнитной оси произвольной трехмерной конфигурации величина  $V_0''(\Phi)$  имеет вид [9]:

$$V_0''(\Phi) = -\frac{1}{\pi} \oint \frac{ds}{B_0'^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}} \left\{ \frac{k^2}{2} (1 - \varepsilon \cos 2\delta) - \frac{3}{4} \frac{B_0''^2}{B_0^2} - \right. \\ \left. - \frac{\eta'^2}{4} - \varepsilon^2 (\delta' - \alpha_0')^2 + \varepsilon \frac{\eta' B_0''}{B_0} - k \left[ \frac{(2-\varepsilon)\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_3}{1+\varepsilon} \cos \delta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(2+\varepsilon)\alpha_2 - 3\varepsilon\alpha_4}{1-\varepsilon} \sin \delta \right] \right\}. \quad (1.41)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по длине;  $B_0(s)$  — напряженность продольного магнитного поля;  $\varepsilon(s) = \text{th } \eta$  — параметр эллиптичности магнитных поверхностей;  $\delta(s)$  характеризует проворачивание сечений магнитных поверхностей вокруг магнитной оси;  $\alpha_0'(s) = \kappa$  — кручение оси;  $k(s)$  — ее кривизна;  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  — «параметры» формы магнитных поверхностей, причем  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  связаны, главным образом, с треугольностью сечений.

Анализ выражения (1.41) показывает, что магнитная яма может быть создана при наличии эллиптичности и треугольности магнитных поверхностей (члены, пропорциональные  $3k\varepsilon\alpha_3, 3k\varepsilon\alpha_4$ ). Такой путь повышения устойчивости плазмы, применяемый в токамаках, вначале был предложен именно для стеллараторов с пространственной осью (D-образные сечения магнитных поверхностей [56]). Расчеты для систем с винтовой симметрией, когда исходным служит

двумерное уравнение равновесия, показывают, что при D-образной форме сечений возможно равновесие без потери локальной МГД-устойчивости при весьма высоких  $\beta \sim 30\%$  (см. разд. 1.5).

Магнитная яма может быть создана и в системах с круглыми сечениями магнитных поверхностей при соответствующим образом изменяющихся кривизне  $k(s)$  и продольном магнитном поле  $B_0(s)$ . Благодаря простоте осуществления (нет необходимости в продольных стабилизирующих обмотках) эта возможность представляет интерес в системах типа дракон (S-пробки) [88].

При наличии плазмы конечного давления необходимая для стабилизации геометрическая магнитная яма возникает из-за деформаций магнитных поверхностей. Так, для систем с винтовой симметрией в соответствующем приближении критерий Мерсье принимает вид [64]

$$\frac{\mu'^2}{4} + \frac{2p'}{aB_0^2} \left[ 1 + k^2 R^2 + \frac{3R^2 k \Delta'}{a} \left( \frac{\alpha}{a} - \alpha' + \frac{3}{2} \Delta'^2 \right) \right] > 0. \quad (1.42)$$

Здесь  $k = r_0/R_h^2$ ;  $R_h^2 = r_0^2 + \lambda^2$ . Коэффициент перед  $p'$  в (1.42) пропорционален глубине геометрической магнитной ямы, которая зависит от давления через смещение  $\Delta(a)$  и эллиптичность  $\alpha$  магнитных поверхностей (по поводу их определения — см. гл. 5). При параболическом профиле давления  $p = p_0(1 - a^2/b^2)$  критерий (1.42) принимает вид

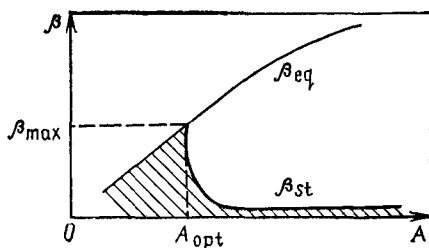
$$\frac{1}{4} \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 - 4 \frac{\beta_\theta}{R^2} [1 + k^2 R^2 - 3\beta_\theta^3 k^2 b^2] > 0, \quad (1.43)$$

где  $\beta_\theta = 4\pi^2 p_0 R^2 / \chi'^2$ . Отсюда следует, что в системе, не имеющей вакуумной магнитной ямы, может быть две зоны устойчивости: при малых  $\beta$  устойчивость определяется широм, затем следует неустойчивость, связанная с существованием магнитного бугра, и лишь при больших  $\beta$  наступает самостабилизация [64] (см. также результаты численного счета, разд. 1.5).

#### 1.4. Удержание плазмы в обычных стеллараторах

Стеллараторы имеют много общего с токамаками. Как и в токамаках, неоднородность тороидального магнитного поля является причиной вторичных токов (токи Пфирша — Шлютера) и соответствующего ограничения на давление плазмы,  $\beta \approx \mu^2 b/R$ . Поскольку при фиксированных магнитных параметрах  $\mu \sim L$ , то с ростом аспектного отношения  $A$  предельное по равновесию  $\beta_{eq}$  растет линейно (рис. 9). Предельное же по устойчивости локальных мод  $\beta_{st}$  при большом аспектном отношении мало из-за влияния магнитного бугра. С уменьшением  $A$  уменьшается  $\beta_{eq}$ , но одновременно уменьшается и магнитный бугор — становится существенным связанный с кривизной благоприятный вклад в  $V_0''(\Phi)$ . При некотором оптимальном аспектном отношении  $\beta_{eq}$  и  $\beta_{st}$  сравниваются. Абсолютное значение  $\beta_{max}$  зависит от магнитных параметров и оказывается выше в короткопериодных системах.

Рис. 9. Качественная зависимость  $\beta_{eq}$  и  $\beta_{st}$  от аспектного отношения при фиксированных параметрах  $e_l$  и  $mb/R$ . Область устойчивого равновесия заштрихована



**Особенности равновесия.** Укажем здесь на некоторые особенности удержания плазмы в обычных стеллараторах, отличающие эти системы от токамака. Главное отличие, проявляющееся в системах с широм ( $\mu_h' \neq 0$ ), связано с выделенностью геометрической оси винтовых обмоток и своеобразной жесткостью стеллараторных магнитных поверхностей [89]. Формально это отличие проявляется в том, что такие величины, как  $\mu$ ,  $V''(\Phi)$ , определяются не только формой магнитных поверхностей, но и их положением относительно геометрического центра винтовых обмоток. «Эффект жесткости» магнитных поверхностей легко обнаруживается с помощью уравнения Грина — Джонсона — Веймер для смещения  $\Delta(a)$  магнитных поверхностей [40]. Для системы с набором «невзаимодействующих» винтовых гармоник магнитного поля его можно записать в виде [90] (подробнее — см. гл. 5)

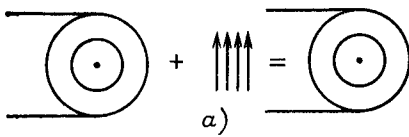
$$[(\mu_h \Delta)' a^3]' + \frac{1}{\mu_j} (\mu_j a^2 \Delta')' = - \frac{2p' a^3 R}{(\mu_h + \mu_j) B_0^2} \left[ 1 - B_0^2 V_{0\infty}'(\Phi) \frac{\Delta}{2} \right]. \quad (1.44)$$

Невзаимодействующими будем называть гармоники винтового магнитного поля, характеризуемые параметрами  $l$ ,  $m$  и  $l'$ ,  $m'$  с  $m \neq m'$ . Их вклад в  $\mu$ ,  $V''(\Phi)$  аддитивен.

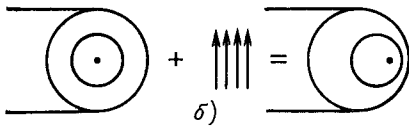
Решение уравнения (1.44) при  $p' = 0$  описывает влияние однородного магнитного поля на конфигурацию магнитных поверхностей. В токамаке ( $\mu_h = 0$ ), а также в стеллараторе без шира ( $\mu_h' = 0$ ) однородное магнитное поле сдвигает плазму как целое, без изменения относительного положения магнитных поверхностей (решение однородного уравнения  $\Delta = \text{const}$ ). В стеллараторе же с широм ( $\mu_j = 0$ ,  $\mu_h' \neq 0$ ) решение однородного уравнения

$$\Delta(a) = \text{const}/\mu_h(a) \quad (1.45)$$

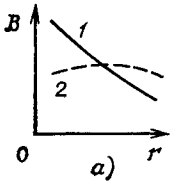
показывает, что под действием поперечного магнитного поля внешние поверхности (поверхности с большим  $\mu_h$ ) смещаются меньше, чем внутренние. При общем смещении от центра кривизны внутренние поверхности оказываются больше смещенными в область слабого продольного поля. При не слишком большом аспектном отношении такое смещение может привести к созданию магнитной ямы (рис. 10). Этот эффект, как уже упоминалось, играет большую роль в стабилизации МГД-возмущений.



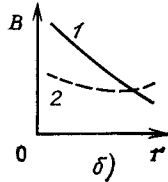
а)



б)



а)



б)

Рис. 10. Влияние поперечного поля на смещение магнитных поверхностей и глубину магнитной ямы для токамака (а) и стелларатора с широм (б): 1 — локальное значение напряженности магнитного поля; 2 — ее среднее значение на магнитной поверхности

Другое отличие стелларатора от токамака связано с членом  $\rho' V_{0\infty}^*(\Phi)$  в уравнении для смещения. Учет этого члена правомерен лишь для систем с большим аспектным отношением, когда конфигурация имеет магнитный бугор [связанным с кривизной вкладом в  $V_0''(\Phi)$  можно пренебречь].

Грин, Джонсон и Веймер [40] показали, что из линейного уравнения (1.44) следует существование критического значения  $\beta$ , соответствующего  $\Delta \rightarrow \infty$ . Это значение совпадает с предельным по устойчивости моды  $m=1, n=0$  значением  $\beta$  для прямого стелларатора с аналогичными магнитными параметрами. Из расчетов, полученных численным решением двумерного уравнения (1.7) методом моментов [72] и представленных на рис. 11, видно, что при больших аспектных отношениях при  $\beta = \beta_c$  существует особенность, а при малых  $A$  намечается насыщение смещения. Вывод об отсутствии критического значения  $\beta$  в стеллараторах с магнитной ямой был сделан на основании аналитических расчетов в [48, 49].

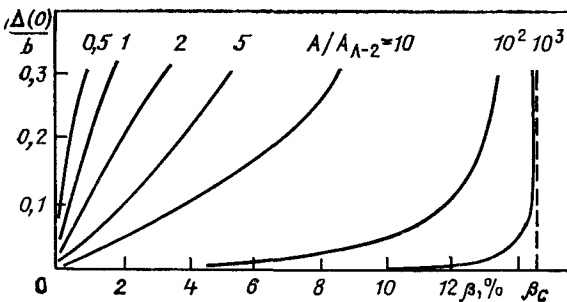


Рис. 11. Зависимость смещения магнитной оси относительно геометрической от давления плазмы и аспектного отношения в двухзаходном стеллараторе с магнитными параметрами  $\epsilon=0,25, mb/R=1,6$ . Форма и положение граничной магнитной поверхности фиксированы,  $A_{L-2}=8,7$

Наличие члена  $s V_{0\infty}^*(\Phi)$  в правой части уравнения (1.44) связано с тем, что в стеллараторе наряду с обычным дипольным продольным током Пфирша—Шлютера  $j_{\parallel} = -2\rho' \cos \theta / (\mu B_0)$ , возникающим из-за тороидальной неоднородности магнитного поля, возникает дополнительный ток  $j_{\parallel} = \rho' V_{0\infty}^* B_0 \Delta \cos \theta / \mu$ , вызываемый не-



однородностью винтового поля. В системах с большим магнитным бугром при определенных условиях эти токи могут скомпенсировать друг друга и конфигурация станет слабо чувствительной к давлению плазмы. В пределе длиннопериодного ( $l=2$ ) стелларатора условие компенсации  $B_0^2 V_{\infty}''(\Phi) \Delta = 2$  требует  $\Delta = R / (m^2 \epsilon_2^2)$ ; магнитные поверхности должны быть смещены к центру кривизны. Такой результат был получен при численном решении двумерного уравнения равновесия уже в [37]. Отметим, что наличие винтовых магнитных полей позволяет несколько уменьшить ток Пфирша — Шлютера даже в системе с магнитной ямой (правда, за счет ее уменьшения).

Идея компенсации дипольного тока и создания нечувствительных к давлению плазмы конфигураций была положена в основу установок типа «Сциллак» (тороидальные  $\theta$ -пинчи). Такие конфигурации неустойчивы при  $\beta > \beta_{кр}$  относительно «твердотельного» смещения плазменного шнура (см. также [91]).

**Устойчивость плазмы в обычных стеллараторах** а) Крупномасштабные неустойчивости. Основой при изучении крупномасштабных неустойчивостей в стеллараторах обычно служат полученные в стеллараторном приближении двумерные уравнения Страусса [68, 69, 76], Л. М. Коврижных и С. В. Щепетова [42, 49] или «редуцированный» функционал энергии [38]:

$$W = (1/2) \int \{ \mathbf{Q}_{\perp}^2 + j_{\parallel} \xi_{\perp} \mathbf{Q}_{\perp} - (\xi_{\perp} \nabla p) (\xi_{\perp} \nabla \Omega) \} d\tau, \quad (1.46)$$

где

$$\xi_{\perp} = [\Delta \zeta \nabla \eta], \quad \mathbf{Q}_{\perp} = \left[ \nabla \zeta, \nabla \left( \frac{B_0}{R} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + [\nabla \zeta \nabla \psi^0] \nabla \eta \right) \right]. \quad (1.47)$$

В функционал (1.46) входят только не зависящие от продольной координаты равновесные величины. В силу этого колебания с различными волновыми числами

$$\eta = \sum_{m, n} \eta_{mn} \exp[i(n\zeta - m\theta)] \quad (1.48)$$

оказываются, как и в двумерном случае, независимыми. Из крупномасштабных неустойчивостей наиболее изучены связанные с продольным током винтовые или kink-моды. Если пренебречь при их описании тороидальностью и давлением плазмы, то возмущения с разными  $m$  и  $n$  будут независимы и задача сведется к решению уравнения для  $\eta_{mn}$ :

$$(a^3 v^2 \eta')' - \{ (m^2 - 1) a v^2 - 3(a \mu_h' + a^2 \mu_h'') a v \} \eta = 0, \quad (1.49)$$

где  $\eta \equiv \eta_{mn}$ ;

$$v = -n/m + \mu_J + \mu_h. \quad (1.50)$$

Для решения этого уравнения необходимо задать профили  $\mu_h(a)$  и  $\mu_J(a)$ . Согласно теореме Ньюкомба [92] колебания будут неустой-

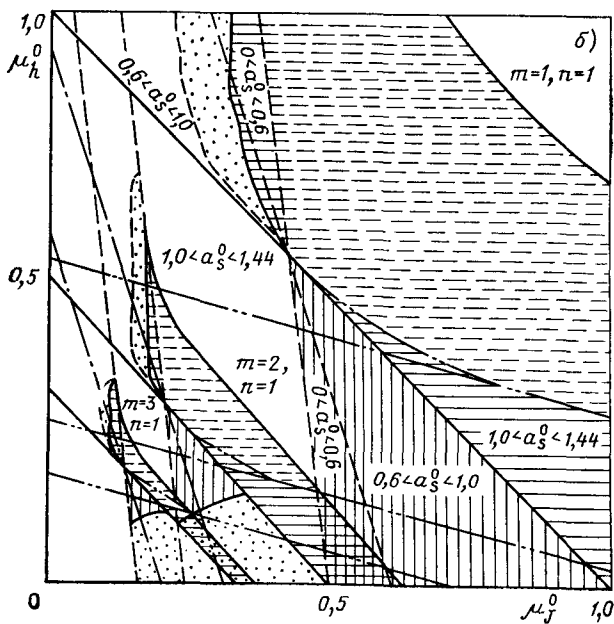
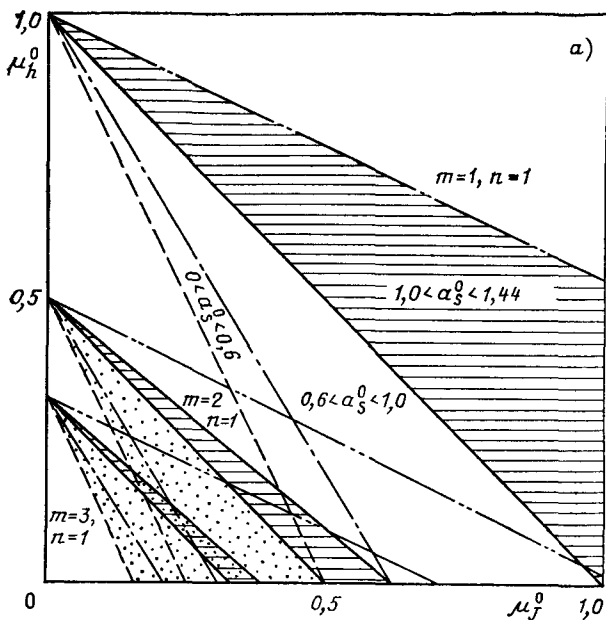


Рис. 12. Диаграмма устойчивости винтовых возмущений в стеллараторах с током при  $\mu_h = \text{const}$  (а) и  $\mu_h = \mu_h^0 (0,286 + 0,714a^2/b^2)$  (б) [94]:

вертикальная штриховка — области неустойчивости внутренних мод, горизонтальная — внешних (при наличии резонансной поверхности между плазмой и кожухом — сплошные линии, при отсутствии — пунктир), точки — области неустойчивости тиринг-мод. Профиль плотности тока — параболический, радиус кожуха составляет 1,44 радиуса плазмы  $b$ . Обозначения:  $a_s^0 = a_s/b$ , где  $a_s$  — радиус резонансной поверхности;  $\mu_h^0$  — стеллараторное, а  $\mu_J^0$  — токовое вращательное преобразование на границе плазмы

чивыми, если решение уравнения (1.49) обращается в нуль в области, где  $v > 0$ . Пояснение физического смысла связи с устойчивостью решения аналогичного (1.49) уравнения для токамака дано в [93].

Отметим, что поведение решений (1.49) вблизи особых точек, находящихся в плазме, определяет устойчивость тиринг-мод.

На рис. 12, а представлена полученная численным решением (1.49) диаграмма устойчивости для стелларатора с постоянным стеллараторным вращательным преобразованием и  $j_z = j_0(1 - a^2/b^2)$  [94]. Как видно из этого рисунка, зоны неустойчивости сужаются при уменьшении тока в плазме. В случае  $\mu_h' \neq 0$  при малых токах зоны неустойчивости вообще пропадают (рис. 12, б). Более подробно об устойчивости винтовых мод возмущений — см. обзоры [21, 95].

Для замкнутого стелларатора коэффициенты функционала (1.46) зависят уже не только от радиуса, но и от полоидального угла, и уравнения для  $\eta_{ml}$  с различными  $m$  оказываются связанными. Поэтому устойчивость крупномасштабных возмущений, вызываемых градиентом давления, в замкнутом бестоковом стеллараторе рассчитывается, как и в токамаках, численными методами. Имеющиеся расчеты приводят к значению критического  $\beta$  порядка трех процентов [50].

б) Устойчивость локальных мод возмущений. Более простым является вопрос об устойчивости локальных мод возмущений. Здесь задача, как известно, сводится к решению одномерного дифференциального уравнения второго порядка [33].

Как показывают и аналитические, и численные [96] расчеты, для обычных стеллараторов можно пренебречь быстроосциллирующими «стеллараторными» членами. При этом в стеллараторном приближении уравнение для баллонных мод принимает вид [72] (подробнее — см. гл. 6)

$$\frac{d}{dy} \left( f \frac{d\xi}{dy} \right) = h\xi, \quad (1.51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f &= \alpha_{11}^2 - 2\alpha_{12}^2 \frac{q'y}{q} + \alpha_{22}^2 \left( \frac{q'y}{q} \right)^2; \\ h &= -\frac{4\pi^2 p'}{\psi'^2} \left\{ \frac{q'y}{q} \frac{\partial}{\partial y} \langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta} - \frac{[ \int_{33} \langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta} ]'}{\alpha_{33}^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

В (1.52)  $\alpha_{ik}^2 = \langle g_{ik} / \sqrt{g} \rangle_{\zeta}$  — не зависящие от продольной координаты элементы метрического тензора потоковой системы координат  $(a, \theta, \zeta)$  с выпрямленными силовыми линиями; штрихом отмечены производные по  $a$ .

Условием неустойчивости является наличие достаточно быстро убывающего решения уравнения (1.51) [97, 98]. При численных расчетах уравнение (1.51) обычно исследуют на конечном интервале, а асимптотическое поведение решения при  $y \rightarrow \infty$  определяют аналитически. В этом пределе, как и для токамаков [97—100], условие устойчивости сводится к критерию Мерсье.

Качественно влияние основных параметров на устойчивость бал-

лонных мод можно пояснить на примере полученного в стеллараторном приближении необходимого аналитического критерия устойчивости [46], аналогичного критерию Погуце и Юрченко для токамака [99, 100]. Для стелларатора со смесью «невзаимодействующих» гармоник винтового магнитного поля его можно записать в виде

$$\frac{1}{2} s^2 + \frac{p'R}{\mu^2 B_0^2} \left[ V_{0\infty}''(\Phi) B_0^2 a + \frac{(\mu_h' a^3)'}{\mu a^2} \Delta \right] + \frac{1}{2} s \left( \frac{2p'R}{\mu^2 B_0^2} \right)^2 > 0. \quad (1.53)$$

Этот критерий в явном виде демонстрирует одну из характерных особенностей устойчивости локальных мод в стеллараторах — отсутствие баллонных мод в стеллараторах с положительным широм. Вклад баллонного эффекта описывается в (1.53) последним членом. В токамаках при спадающей плотности тока  $s < 0$ , поэтому этот член приводит к существенным ограничениям на предельное давление плазмы. В стеллараторах же обычно  $s > 0$  и критерий (1.53) оказывается мягче критерия Мерсье. Отметим, что это утверждение справедливо для стеллараторов с  $\mu_h' > 0$  лишь при не очень высоких  $\beta$  — с ростом  $\beta$  величина  $s$  может существенно измениться [67] и даже изменить знак [101].

Распишем критерий Мерсье для стелларатора со смесью  $l=2$  и  $l=3$  «взаимодействующих» ( $m=m'$ ) гармоник. При  $mb/R \ll 1$  он имеет вид [102]

$$\frac{1}{4} s^2 + \frac{p'Ra}{B_0^2 \mu^2} \left[ \frac{2m^2 \epsilon_2^2}{R} \left( 1 - \frac{\epsilon_3}{\mu \epsilon_2} \right) + \frac{(\mu_h' a^3)'}{\mu a^3} \Delta \right] > 0. \quad (1.54)$$

Эффект углубления магнитной ямы из-за смещения магнитных поверхностей [39] описывается здесь последним слагаемым. Отметим, что его появление в (1.54) связано с уже упоминавшейся «жесткостью» магнитных поверхностей в стеллараторе с широм. Дополнительная стабилизация возникает из-за «взаимодействия» соответствующим образом подобранных винтовых двух- и трехзачленных полей (см. [37]).

Критерий (1.54) позволяет ответить на вопрос о том, что лучше для устойчивости — шир или магнитная яма: лучше шир, но постольку, поскольку он обеспечивает создание необходимой для устойчивости магнитной ямы. Входящее в (1.54) смещение  $\Delta$  магнитных поверхностей может быть создано как внешним поперечным полем, так и поперечным полем, создаваемым протекающим по плазме дипольным током, вызываемым градиентом давления. В последнем случае имеет место эффект самостабилизации [39, 42—46]. В отличие от токамака или системы с пространственной осью в обычных стеллараторах этот эффект проявляется уже в линейном по смещению приближении.

## 1.5. Результаты численного счета

Качественные закономерности удержания плазмы в стеллараторах, выясненные при аналитическом рассмотрении равновесия и устойчивости, были подтверждены и детализированы многочисленными численными расчетами. Для стеллараторов с пространственной осью они проводились главным образом на основе точного двумерного уравнения равновесия для систем с винтовой симметрией, а для обычных стеллараторов — исходя из приближенного двумерного уравнения (1.7). Наиболее детально изучена устойчивость относительно локальных мод возмущений.

**Системы с винтовой осью.** Как следовало из аналитических расчетов, предельное по равновесию давление плазмы в стеллараторах с пространственной осью оказывается достаточно большим, а устойчивость локальных мод определяется главным образом наличием магнитной ямы, создаваемой деформацией магнитных поверхностей.

Остановимся вначале на расчетах, использующих приближение винтовой симметрии. Зависимости предельных по равновесию и устойчивости локальных мод значений  $\beta$  от эллиптичности  $E$  и треугольности  $\delta$  граничной магнитной поверхности, а также от «аспектного отношения»  $A_h = R_h/b$  и угла намотки  $\gamma$  ( $\text{tg } \gamma = \lambda/r_0$ ) демонстрируют данные, представленные на рис. 13 [81]. Во всех случаях предельное по равновесию давление плазмы увеличивается с ростом  $\gamma$ . При круговом сечении граничной магнитной поверхности ( $E=1$ ,

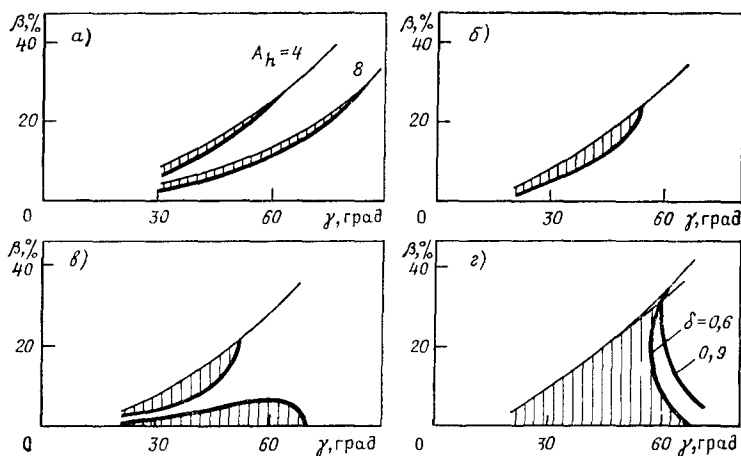


Рис. 13. Зоны устойчивого удержания плазмы (заштрихованы) в стеллараторе с винтовой осью:

—  $\beta_{\text{eq}}$ , — граница устойчивости. Форма крайней магнитной поверхности описывается уравнением  $r = r_0 + b(\cos \theta - \delta \sin^2 \theta)$ ,  $z = Eb \sin \theta$ : а —  $E=1,0$ ,  $\delta=0$ , б —  $E=-1,3$ ,  $\delta=0,3$ ;  $A_h=4,0$ , в —  $E=1,3$ ,  $\delta=0,6$ ,  $A_h=4,0$ ; г —  $E=1,6$ ,  $A_h=4,0$

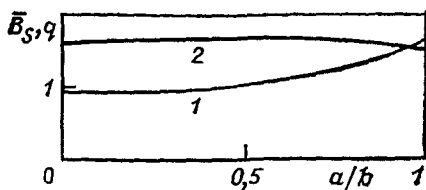
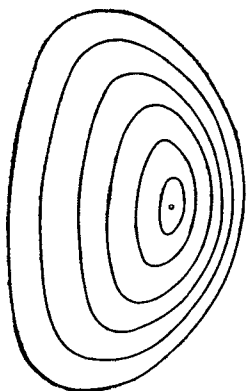


Рис. 15. Зависимость от радиуса магнитной индукции  $\bar{B}_s(1)$  и обратного вращательного преобразования  $q=\mu^{-1}(2)$

Рис. 14. Карта магнитных поверхностей стелларатора с винтовой осью:

$E=1.6, \delta=0.3, A_h=4.0, \gamma=56^\circ, \beta=32\%$

$\delta=0$ ), когда вакуумной магнитной ямы нет, устойчивость связана с эффектом самостабилизации и наступает лишь при  $\beta$ , близких к предельному по равновесию (рис. 13, а). Увеличение  $\delta$  при наличии эллиптичности магнитных поверхностей ( $E > 1$ ) приводит к расширению зоны самостабилизации (рис. 13, б), а затем и к появлению первой зоны устойчивости, обусловленной широм (рис. 13, в). Дальнейшее увеличение  $E$  и  $\delta$  приводит к слиянию этих зон (рис. 13, г); при  $\gamma < 50^\circ$  плазма становится устойчивой относительно локальных мод при всех  $\beta$ , вплоть до предельных по равновесию. Все эти расчеты были выполнены для бестоковой плазмы.

В качестве примера на рис. 14 показана форма магнитных поверхностей рассчитанной в [81] устойчивой конфигурации с  $\beta = 32\%$ . Приведенные на рис. 15 профили среднего продольного магнитного поля и  $q$  демонстрируют наличие магнитной ямы и малый шир.

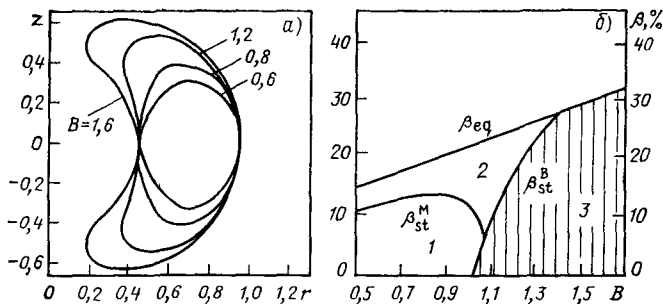
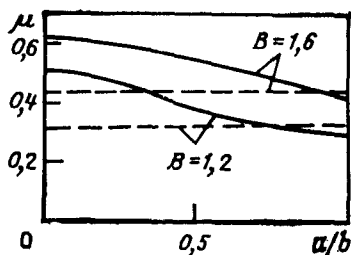


Рис. 16. Стелларатор с винтовой осью и бобообразным сечением магнитных поверхностей:

а — сечения границы плазмы, задаваемой уравнениями  $r = \rho \cos \psi + 0.2, z = \rho \sin \psi, \psi = B \sin \theta, \rho = 0.5(1 + 0.5 \cos \theta)$ ; б — зависимость предельных значений  $\beta = 2\bar{p}/B_e^2$  от параметра  $B$ . Для случая  $p \sim (\psi - \psi_0)^2$  показаны области неустойчивости по Мерсье (1), неустойчивости баллонных мод (2) и устойчивого равновесия (3)

Рис. 17. Изменение профиля вращательного преобразования с ростом  $\beta$  в стеллараторе для двух случаев, показанных на рис. 16: — — —  $\beta=0$ ; —  $\beta=20\%$



Влияние эллиптичности и треугольности магнитных поверхностей на устойчивость плазмы (по Мерсье) исследовалось и в [80]. Здесь для случая  $p'(\psi) = \text{const}$  и  $j_{s0} = 0$  ( $j_{s0}$  — плотность тока на оси) была определена оптимальная форма граничной поверхности и кривизна оси, при которых  $\beta$  достигает своего максимального значения ( $\sim 40\%$ ). Показано, что только выбором эллиптичности, треугольности поверхностей и кривизны оси можно добиться 20-кратного увеличения  $\beta$  по сравнению со случаем недеформированной границы.

Равновесие и устойчивость плазмы при «бобообразной» форме магнитных поверхностей исследовались в [82]. На рис. 16 приведены различные контуры сечений магнитных поверхностей, характеризуемые параметром  $B$ , и результаты расчета предельных по устойчивости локальных мод и равновесию значений  $\beta$ . Как следует из этих расчетов, при соответствующем выборе формы граничной магнитной поверхности максимально допустимое значение  $\beta$  оказывается высоким — порядка 30%. Из рис. 16 видно, что при сильной бобообразности магнитных поверхностей критерий Мерсье и критерий устойчивости баллонных мод дают уже сильно различающиеся результаты. Это объясняется наличием заметного отрицательного шира (рис. 17), когда вклад баллонного эффекта [последний член в (1.53)] приводит, как и в токамаке, к появлению более опасных локальных возмущений, чем моды Мерсье. Однако и при отрицательном шире сильная деформация магнитных поверхностей позволяет получать высокие предельные  $\beta$ .

Простое замыкание винта в тор должно, вообще говоря, приводить к ухудшению удерживающих свойств конфигурации, поскольку теперь сечения магнитных поверхностей не всюду будут смещены точно от центра кривизны и магнитная яма уменьшится. Однако наложением дополнительных магнитных полей [например, неоднородного продольного магнитного поля, изменяющегося в соответствии с кривизной (см. (1.41))], можно и в этом случае получить конфигурации с достаточно высокими  $\beta$ . Даже без такой оптимизации в трехмерных расчетах удавалось получать для гелиака  $\beta \sim 8\%$  [74]. Здесь же отмечалось, что по расчетам гелиак — наилучшая из рассмотренных авторами [74] стеллараторная конфигурация.

Вопрос о выборе основных параметров замкнутых винтовых систем пока остается открытым. Так, из расчетов [83] следует, что

Таблица 1. Параметры некоторых стеллараторов

Установка	$l$	$A$	$m$	$\varepsilon$	$\mu(0)$	$\mu(a_p)$
WVII-A	2	20	5	0,43	0,22	0,22
Л-2	2	8,7	14	0,25	0,22	0,68
Н-Е	2	10	19	0,32	0,5	2,6
Л-3	2	6,4	9	0,47	0,5	2,3
У-3	3	6,7	9	0,63	0	0,7

замкнутые винтовые конфигурации способны удерживать плазму высокого давления даже при малом числе периодов, начиная с двухтрех. В [84] минимальное число периодов, необходимое для обеспечения устойчивости, составляет 6—8. Недавние трехмерные расчеты Л. М. Дегтярева и др. подтвердили возможность устойчивости даже при двух периодах винта.

**Обычные стеллараторы.** Для расчета равновесия, а также устойчивости локальных мод возмущений в стеллараторном приближении, когда задача сводится к двумерной, можно использовать численные коды, разработанные для осесимметричных систем [72, 103]. Специфические стеллараторные члены  $\psi_v$  и  $\Omega^0$  в (1.7) выражаются через потенциал вакуумного винтового магнитного поля. Основные закономерности можно выяснить, ограничиваясь в представлении магнитного поля (1.15) одной гармоникой. Такой подход использовался в [72] для расчета моделей существующих или обсуждавшихся стеллараторов (рис. 18—21). Параметры исследуемых конфигураций приведены в табл. 1. В силу принятого допущения (одна гармоника вакуумного винтового магнитного поля) они могут несколько отличаться от реальных.

На рис. 18 представлены зависимости  $\beta_{eq}$  и  $\beta_{st}$  от смещения  $\Delta_0$  центра граничной поверхности относительно центра винтовых проводников для двухзаходных стеллараторов Л-2, Л-3 и Н-Е. На графиках отложено половинное значение  $\beta$  на магнитной оси. Рост  $\beta_{eq}$  при смещении (любого знака) граничной поверхности объясняется, по-видимому, увеличением вращательного преобразования на смещенных поверхностях. Такое смещение означает приближение граничной поверхности к винтовой сепаратрисе и может привести к нарушению условий применимости исходного уравнения (1.7). Сравнение данных для разных установок показывает, что  $\beta_{eq}$  выше в системах с большими  $\varepsilon_2$  (большое вращательное преобразование) и может достигать 10 %.

Зависимость  $\beta_{st}$  от  $\Delta_0$  для различных установок имеет общую характерную черту: смещение граничной поверхности внутрь к главной оси тора приводит к уменьшению  $\beta_{st}$ , смещение же от оси улучшает устойчивость, причем зависимость  $\beta_{st}$  от  $\Delta_0$  носит пороговый характер. Такой же вывод следует и из аналитического критерия (1.54), согласно которому резкое увеличение  $\beta_{st}$  происходит



Рис. 18. Зависимость предельных по равновесию и локальной устойчивости значений  $\beta$  от смещения  $\Delta_0$  границы плазмы относительно геометрического центра в стеллараторах Л-2, Л-3 и Н-Е. Заштрихованы области устойчивости относительно баллонных мод;  $\beta_0$  — значение  $\beta$  на оси

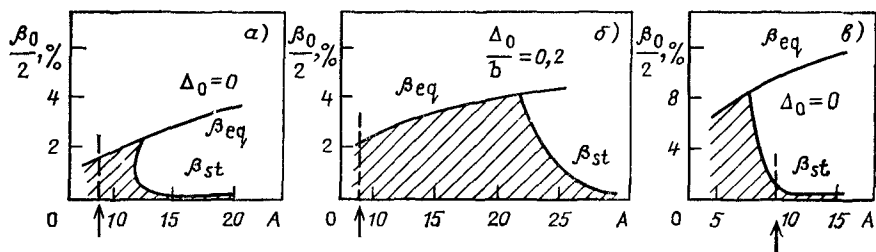
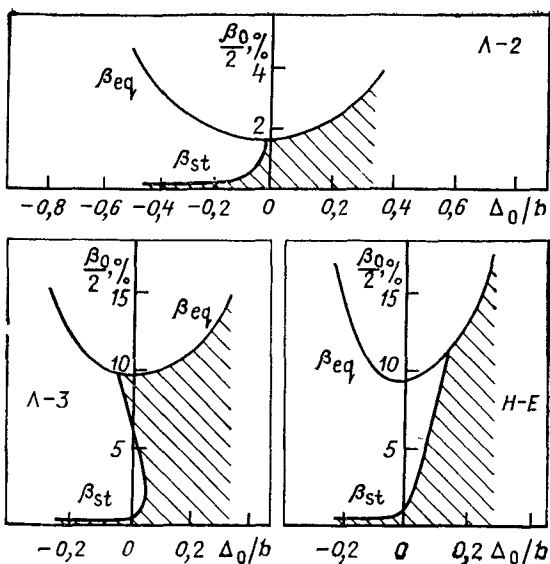
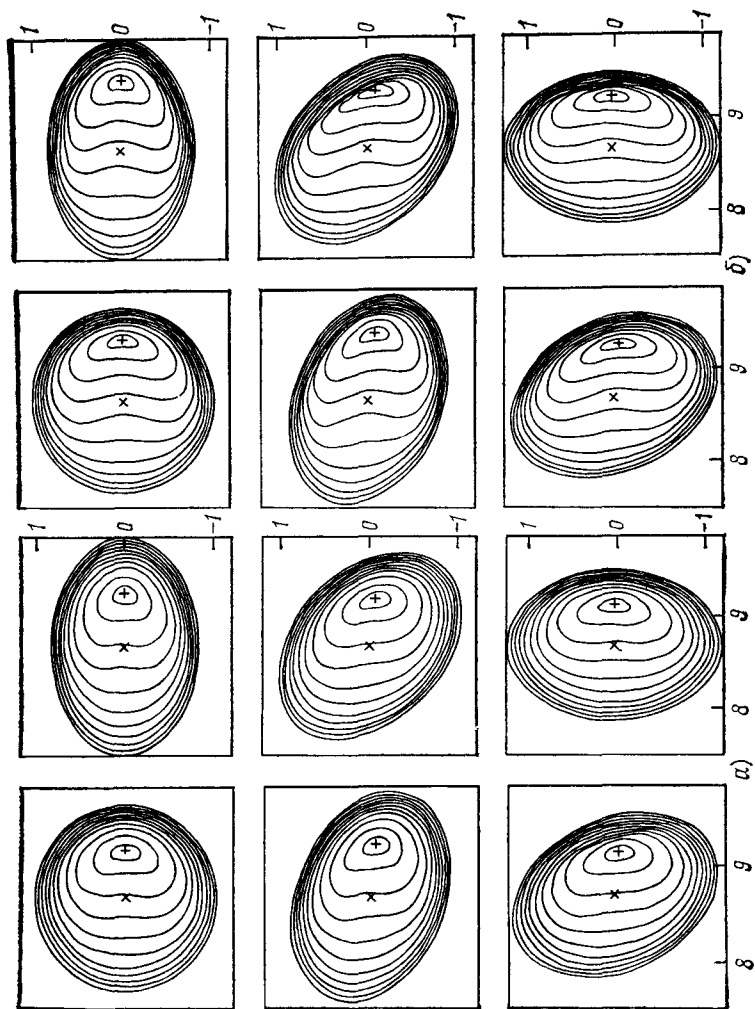


Рис. 19. Зависимости  $\beta_{eq}$  и  $\beta_{st}$  от аспектного отношения для стеллараторов с магнитными параметрами Л-2 (а, б) и Н-Е (в). Стрелками отмечены аспектные отношения этих установок

при изменении знака множителя перед  $p'$ . Из рис. 18 видно, однако, и некоторое различие зависимости  $\beta_{st}(\Delta_0)$  для различных установок. Так, для параметров проекта Л-3 при  $\Delta_0=0$  есть две зоны устойчивости. Этот результат можно интерпретировать следующим образом. Стабилизация широм обеспечивает лишь малые значения  $\beta_{st}$ , а достаточные для перехода к самостабилизации смещения магнитных поверхностей возникают лишь при значительно больших давлениях. Для обеспечения устойчивости при всех  $\beta$  вплоть до максимального необходимо позволить магнитным поверхностям сместиться. Характерной чертой зависимости  $\beta_{st}(\Delta_0)$  в установке Н-Е является отсутствие устойчивости практически при всех  $\beta$  в случае  $\Delta_0=0$ , что может быть связано с недостаточностью стабилизации широм на краю плазменного шнура. Однако уже небольшое смещение граничной поверхности обеспечивает получение вы-

Рис. 20. Сечения усредненных и реальных трехмерных магнитных поверхностей в стеллараторе «Ливень-2».  
 $\alpha - \beta = 2,5\%$ ;  $\delta - \beta = 4,4\%$



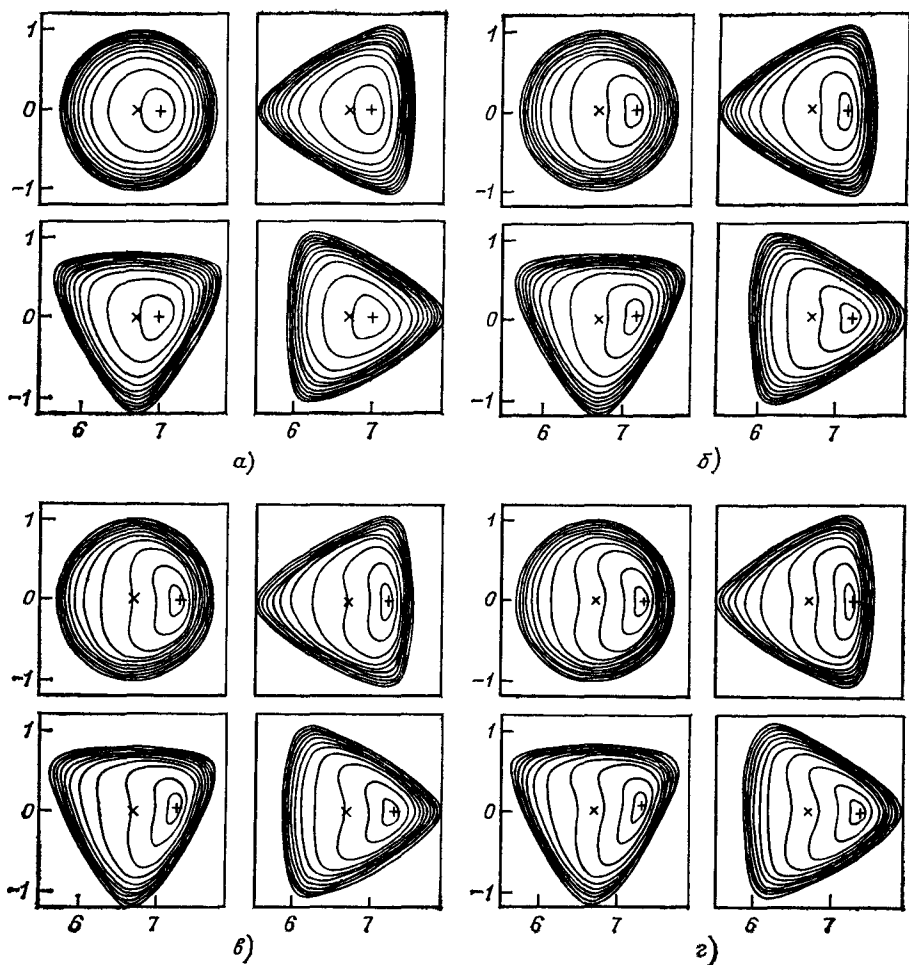


Рис. 21. Сечения усредненных и реальных трехмерных магнитных поверхностей в стеллараторе «Ураган-3»:

а —  $\beta = 0,23\%$ ; б —  $\beta = 0,9\%$ ; в —  $\beta = 1,8\%$ ; г —  $\beta = 2,7\%$

сокого (10 %) предельного  $\beta$  как по равновесию, так и по устойчивости локальных мод.

На рис. 19 представлена зависимость предельного давления от другого геометрического параметра — аспектного отношения — при магнитных параметрах, соответствующих стеллараторам Л-2 и Н-Е. Аспектные отношения названных установок отмечены на рис. 19 стрелками. Как видно из рис. 19, при рассмотренных наборах магнитных параметров с ростом  $A$  предельное по равновесию давление плазмы растет, а  $\beta_{st}$ , вообще говоря, падает, как это следует и из аналитических расчетов (ср. с рис. 9). Численные расче-

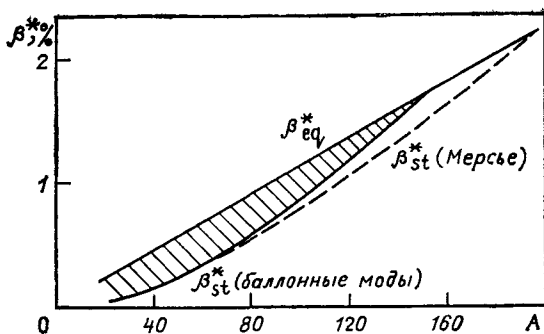


Рис. 22. Зависимость  $\beta_{eq}$  и  $\beta_{st}$  от аспектного отношения  $A$  в стеллараторе с магнитными параметрами WVII-A

ты позволяют, однако, получить более детальную картину и выявить некоторые особенности в поведении  $\beta_{st}(A)$  при различных магнитных параметрах. Из приведенных данных видно, например, что увеличение аспектного отношения при магнитных параметрах Л-2 приводит к увеличению  $\beta_{eq}$ , не нарушая при этом устойчивости. Можно сказать, что стелларатор Л-2 обладает значительным запасом по устойчивости при всех допустимых по равновесию давлениях. Это следует и из данных, приведенных на рис. 18: предельное по устойчивости значение  $\beta$  велико даже при неблагоприятных смещениях граничной поверхности. Увеличение аспектного отношения при  $\Delta_0=0$  приводит, как и в Л-3 (см. рис. 18), к появлению двух зон устойчивости. Максимальное возможное  $\beta_0$  в установке с магнитными параметрами Л-2 даже при оптимальном аспектном отношении  $A=20$  не превышает 8%. Как видно из рис. 19, оптимальное аспектное отношение для стелларатора с магнитными параметрами Н-Е ( $A_{opt} \approx 8$ ) несколько меньше, чем у существующей установки.

На рис. 20 и 21 приведены сечения магнитных поверхностей при различных значениях  $\zeta$  двухзаходного стелларатора «Ливень-2» и трехзаходного стелларатора «Ураган-3».

Рисунок 22 [20] демонстрирует различие ограничений на  $\beta_{st}$ , даваемых критерием Мерсье и общим условием устойчивости баллонных мод. Как и в стеллараторах с пространственной осью, более сильные ограничения, следующие из условия устойчивости баллонных мод, связаны с возникновением отрицательного шира, когда последний член в критерии (1.53) становится дестабилизирующим.

Для более детального исследования конкретных конфигураций вакуумное винтовое магнитное поле нужно рассчитывать точно, исходя из геометрии винтовых проводников и токов в них. Такие расчеты были проведены в [76, 104] для проектируемого торсатрона АТФ. Если в проведенных в [72] расчетах радиус плазменного шнура считался заданным, то в этих работах он определялся после построения вакуумных магнитных поверхностей как радиус последней неразрушенной магнитной поверхности. Эта процедура проводилась при каждом значении заданного внешнего поперечного поля.

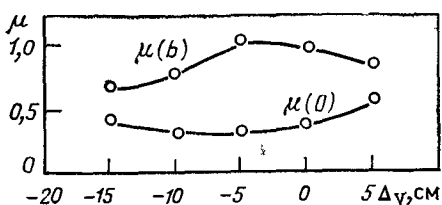


Рис. 23. Зависимость  $\mu_h(0)$ ,  $\mu_h(b)$ ,  $V'(\Phi)$  и  $b$  от вакуумного смещения магнитной оси  $\Delta V$  в стеллараторе торсатроне ATF

$\Delta V'/V'(0)$ , %

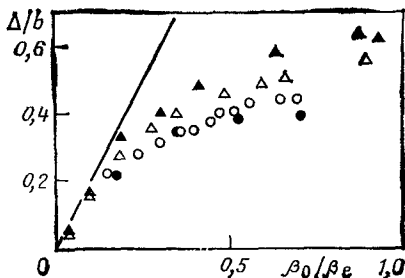
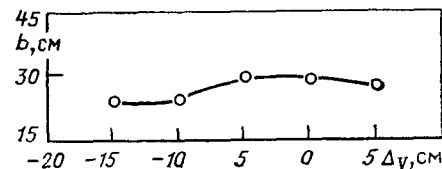
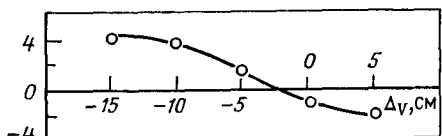


Рис. 24. Зависимость смещения магнитной оси от  $\beta$  в стеллараторе ATF:

$\Delta$ ,  $\blacktriangle$  — результаты двумерных расчетов;  $\circ$ ,  $\bullet$  — трехмерные расчеты ( $\circ$  — код Ходуры — Шлютера,  $\bullet$  — код NEAR),  $\blacktriangle$  — бестоковая плазма ( $j=0$ );  $\Delta$ ,  $\circ$  и  $\bullet$  — равновесие с замороженными потоками; — — — — смещение, рассчитанное с помощью одномерного, линейного по  $\Delta$  уравнения,  $\beta_e = 2 \mu^2(b)/A$

Зависимости  $\mu_h(0)$ ,  $\mu_h(b)$ ,  $V'(\Phi)$  и среднего радиуса сечения  $b$  от вакуумного смещения магнитной оси представлены на рис. 23 [76]. Результаты [76] относятся в основном к торсатронам с фиксированным углом наклона ( $\text{tg } \gamma \approx 1,4$ ) двухзаходных винтовых проводников, выбор которого позволяет (по крайней мере для рассчитанного варианта с аспектным отношением обмоток  $A_c = 4,4$ ) получить хорошие вакуумные магнитные поверхности и большой шир при не слишком малом значении  $\mu$  на оси. При заданном  $\gamma$  в [76] были исследованы равновесие и устойчивость по отношению к крупномасштабным возмущениям в зависимости от аспектного отношения, профиля давления плазмы и напряженности внешнего поперечного поля, смещающего магнитную ось. В этой работе было проведено сравнение результатов двумерных расчетов равновесия (код RSTEQ [105]), основанных на уравнении (1.7), и трехмерных расчетов (коды Ходуры — Шлютера [106] и NEAR [107]). При этом оказалось, что все эти методы дают очень близкие результаты (рис. 24).

Расчеты устойчивости крупномасштабных идеальных возмущений на основе уравнений Страусса [68, 69] показали, что в двухзаходных торсатронах с умеренным аспектным отношением решающее влияние на устойчивость имеет положение нуля  $V''(\Phi)$  относительно резонансных магнитных поверхностей. Важная роль магнитной ямы для стабилизации плазмы была подтверждена и рас-

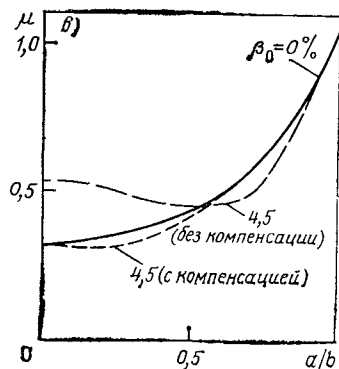
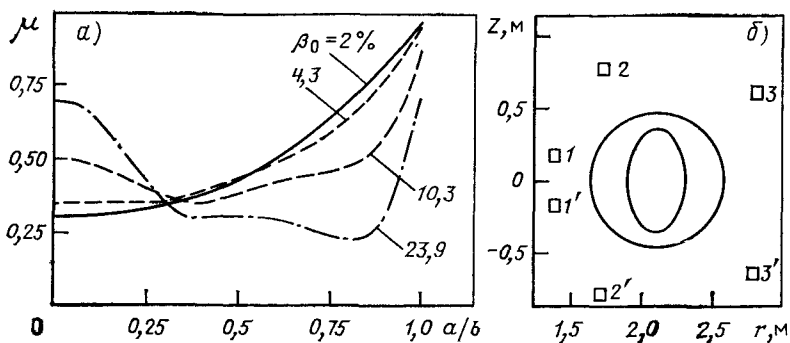


Рис. 25 Контроль профиля вращательного преобразования в стеллараторе ATF:

$a$  — изменение вращательного преобразования с ростом  $\beta$ ;  $b$  — положение трех пар управляющих витков;  $\delta$  — влияние управляющих полей на профиль вращательного преобразования

четами конфигураций, получающихся при наложении внешнего поперечного поля. Было показано, что, как и для мелкомасштабных мод [72], смещение магнитной оси наружу существенно улучшает устойчивость, а внутрь — ухудшает.

Выводы работы [76] оптимистичны: эффект самостабилизации плазмы обеспечивает при выбранных параметрах ATF прямой переход во вторую зону устойчивости. Расчеты демонстрируют легкую возможность получения в ATF  $\beta \sim 10\%$ .

В [76] речь шла лишь о возмущениях плазмы с закрепленной границей. В [50] численно, с использованием функционала (1.46), было показано, что наибольшую опасность для стелларатора с параметрами ATF представляют винтовые моды со свободной границей, которые возбуждаются токами Пфирша — Шлютера (в отсутствие интегрального продольного тока) и становятся неустойчивыми при  $\beta \approx 2,6 \div 2,7\%$ .

На устойчивость плазмы относительно исследованных в [50] возмущений существенно влияет профиль вращательного преобразования. В [101] было показано, что с помощью трех пар проводников, создающих однородное по  $\xi$  поперечное поле, в ATF можно частично (при  $\beta_0 = 4,5\%$  почти полностью) скомпенсировать нежелательные изменения профиля  $\mu$ , возникающие с ростом  $\beta$  (рис. 25)

[101]. Устойчивость плазмы при этом улучшается и возможно достижение больших  $\beta$ , чем это предсказано в [50].

Как уже отмечалось, трехмерные коды Ходуры — Шлютера и NEAR дают результаты, близкие к получаемым на основе упрощенных двумерных уравнений [37, 49, 68, 71]. В отличие от них код ВЕТА (или ВВГ) [74] дает гораздо худшую оценку для  $\beta$ . Так, для стеллараторов с вращательным преобразованием, не превышающим единицы (к ним же относится и ATF), авторам [74] не удалось получить  $\beta$  больше 3%. Это наиболее пессимистическое предсказание пока не было подтверждено или опровергнуто другими столь же детальными расчетами.

## Глава 2. УРАВНЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО РАВНОВЕСИЯ

### 2.1. Магнитное поле в потоковых координатах

Потоковые координаты имеют исключительное значение в теории равновесия и устойчивости тороидальной плазмы. Они используются при изучении самых разных систем — токамаков [29, 100, 108—110], конфигураций с винтовой симметрией [81, 82, 111], стеллараторов различных типов как обычных, допускающих двумерное описание [46, 50, 65—67, 71, 72], так и чисто трехмерных [24, 32, 60, 112, 113]. Перечисление это не является исчерпывающим, их применение постоянно расширяется. Потоковые координаты прочно вошли не только в аналитическую теорию [22, 27, 30, 60, 114—121], они стали основой и многих численных методов [72—74, 107, 122—126]. Так же как и для изотропной, они оказались удобными и для анизотропной плазмы [127—130].

Фундаментальным при введении потоковых координат является предположение о существовании в равновесной конфигурации вложенных магнитных поверхностей. Для двумерных (симметричных) систем существование решений уравнений равновесия, обладающих таким свойством, показывается строго [22, 131]. Для трехмерных систем, хотя и не доказана возможность получения решений с такой топологией, тем не менее модель вложенных поверхностей представляется вполне допустимой, по крайней мере в качестве нулевого приближения (см., например, [74]). Такие поверхности  $a(\mathbf{r}) = \text{const}$ , если они существуют (в трехмерных системах для этого может потребоваться аккуратная «настройка» магнитной системы), естественно выбрать в качестве координатных, поскольку на них, как следует из уравнения равновесия  $\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{V}]$ , лежат линии поля и плотности тока, а давление плазмы постоянно.

Привязка системы координат к магнитным поверхностям позволяет максимально упростить выражения для векторов поля  $\mathbf{V}$ , плотности тока  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{V}$ , а также для ряда дифференциальных операторов ( $\text{div}$ ,  $\mathbf{V}\nabla$  и др.).

Потоковыми или магнитными [116] называют координаты  $x^i = (a, \theta, \zeta)$ , где  $\theta$  и  $\zeta$  — переменные, определяющие положение точки

на поверхности  $a = \text{const}$ . Обычно  $\theta$  и  $\xi$  выбирают так, чтобы они менялись от 0 до  $2\pi$  при обходе вокруг магнитной (малый обход) и главной оси системы (большой обход) соответственно. Будем считать, что  $\theta$  и  $\xi$  заданы подобным образом, более подробно об их выборе поговорим позже.

Если функции  $x^i(\mathbf{r}) = (a, \theta, \xi)$  известны, то определены ковариантные  $\mathbf{e}^i$  и контрвариантные базисные векторы  $\mathbf{e}_i$ :

$$\mathbf{e}^i = \nabla x^i, \quad \mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial x^i, \quad (2.1)$$

якобиан преобразования  $\mathbf{r} \rightarrow x^i$

$$\sqrt{g} = [\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2] \mathbf{e}_3 = [(\nabla x^1 \nabla x^2) \nabla x^3]^{-1}, \quad (2.2)$$

определяющий элемент объема в координатах  $x^i$

$$d\tau = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (2.3)$$

и метрические коэффициенты

$$g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k, \quad (2.4)$$

определяющие квадрат элемента длины

$$dl^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (2.5)$$

Связь базисных векторов  $\mathbf{e}^i$  и  $\mathbf{e}_k$ ,  $\sqrt{g}$  и  $g_{ik}$  дается формулами

$$\mathbf{e}_i = \sqrt{g}^{-1} [\nabla x^{i+1} \nabla x^{i+2}], \quad \mathbf{e}^i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad \sqrt{g} = \det g_{ik}, \quad (2.6)$$

здесь подразумевается, что  $x^{i\pm 3} = x^i$ . Два набора (2.1) базисных векторов позволяют получить два представления произвольного вектора  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i = A^i \mathbf{e}_i, \quad (2.7)$$

в которых

$$A_i = \mathbf{A} \mathbf{e}_i, \quad A^i = \mathbf{A} \mathbf{e}^i. \quad (2.8)$$

Более полная сводка формул, используемых при работе с криволинейными координатами, приведена в [108, с. 229].

Для анализа поведения магнитного поля  $\mathbf{B}$  и плотности тока  $\mathbf{j}$  в равновесной конфигурации достаточно из системы (1.1), описывающей равновесие плазмы, выделить группу чисто геометрических уравнений

$$\nabla \mathbf{a} = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{j} \nabla \mathbf{a} = \text{div} [\mathbf{B} \nabla \mathbf{a}] = 0, \quad (2.9)$$

не содержащих давления плазмы. В уравнениях  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и  $\text{div} [\mathbf{B} \nabla \mathbf{a}] = 0$  дифференцирование осуществляется лишь по  $\theta$  и  $\xi$ . При их решении знания  $a(\mathbf{r})$  поэтому не требуется. Это позволяет рассматривать (2.9) независимо от собственно уравнения равновесия

$$[\text{rot } \mathbf{B} \mathbf{B}] \nabla \mathbf{a} = p'(a) |\nabla \mathbf{a}|^2, \quad (2.10)$$



остающегося после выделения (2.9) из (1.1) и служащего для нахождения  $a(\mathbf{r})$ .

Легко убедиться, что общее решение уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  при  $\mathbf{B} \nabla a = 0$  имеет вид [22, 27] (множитель  $2\pi$  введен для удобства)

$$2\pi \mathbf{B} = [\nabla \psi \nabla \zeta] + [\nabla \Phi \nabla \theta] + [\nabla a \nabla \eta], \quad (2.11)$$

где  $\psi = \psi(a)$ ;  $\Phi = \Phi(a)$ , а  $\eta(a, \theta, \zeta)$  — периодическая по  $\theta$  и  $\zeta$  функция с равным нулю средним:  $\langle \eta \rangle_{\theta, \zeta} = 0$ . Действительно, любой вектор  $\mathbf{B}$ , не имеющий составляющей по  $\nabla a$ , можно разложить на две компоненты:

$$\mathbf{B} = x [\nabla a \nabla \theta] + y [\nabla a \nabla \zeta]. \quad (2.12)$$

Если  $\mathbf{B}$  — соленоидальное поле,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , то  $x$  и  $y$  должны быть связаны уравнением

$$\partial x / \partial \zeta - \partial y / \partial \theta = 0. \quad (2.13)$$

Следовательно, их переменные по  $\theta$  и  $\zeta$  составляющие выражаются через одну периодическую по  $\theta$  и  $\zeta$  функцию, которую обозначим  $\eta / (2\pi)$ :

$$x = x_0(a) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \eta}{\partial \theta}; \quad y = y_0(a) + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \eta}{\partial \zeta}. \quad (2.14)$$

Подставляя  $x$  и  $y$  в (2.12) и обозначая  $x_0 \equiv \Phi'(a) / (2\pi)$ ,  $y_0 \equiv \psi'(a) / (2\pi)$ , получаем формулу (2.11).

Угловые координаты  $\theta$  и  $\zeta$ , соответствующие им полоидальный  $l_P$  и тороидальный  $l_T$  контуры ( $\theta = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$ ) на магнитной поверхности  $a = \text{const}$  (рис. 26) могут быть введены произвольно (необходимо лишь, чтобы  $(\nabla a [\nabla \theta \nabla \zeta])^{-1} \neq 0$ ). От выбора  $\theta$  и  $\zeta$ , естественно, должны зависеть и входящие в (2.11) величины  $\psi$ ,  $\Phi$ ,  $\eta$ .

Функция  $\eta$  при заданных  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\zeta(\mathbf{r})$  определяется уравнением

$$\operatorname{div} [\nabla a, [\nabla \psi \nabla \zeta] + [\nabla \Phi \nabla \theta] + \operatorname{div} \nabla a [\nabla a \nabla \eta]] = 0, \quad (2.15)$$

которое получается при подстановке  $\mathbf{B}$  в виде (2.11) в последнее, еще не использованное уравнение системы (2.9)  $\operatorname{div} [\mathbf{B} \nabla a] = 0$  ( $\mathbf{j} \nabla a = 0$ ). Она очень чувствительна к деформациям контуров  $l_P$  и  $l_T$ . Замена переменных в (2.11)

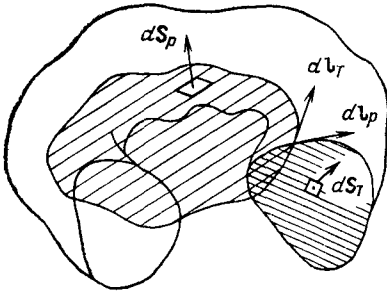
$$\theta = \theta_x + f_\theta; \quad \zeta = \zeta_x + f_\zeta, \quad (2.16)$$

где  $f_\theta$ ,  $f_\zeta$  — периодические по  $\theta_x$  и  $\zeta_x$  функции, ведет к замене в этом представлении  $\eta$  на  $\eta_x$ :

$$\eta_x = \eta + \psi' f_\zeta + \Phi' f_\theta. \quad (2.17)$$

По своему физическому смыслу функции  $\Phi$  и  $\psi$  в (2.11) — это тороидальный и полоидальный магнитные потоки через поверхности  $S_T$  и  $S_P$ , ограниченные контурами  $l_P$  и  $l_T$  соответственно

Рис. 26. Полоидальный и тороидальный контуры на магнитной поверхности



(см. рис. 26):

$$\left. \begin{aligned} \Phi(a) &= \int \mathbf{B} dS_T = \oint \mathbf{A} dl_P; \\ \psi(a) &= \int \mathbf{B} dS_P = \oint \mathbf{A} dl_T, \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал;  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ . Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в эти формулы  $\mathbf{A}$  в виде

$$2\pi\mathbf{A} = \psi\nabla\zeta + \Phi\nabla\theta - \eta\nabla a + \nabla h, \quad (2.19)$$

что эквивалентно (2.11). Здесь  $h$  — произвольная однозначная (в отличие от  $\theta, \zeta$ , изменяющихся на  $2\pi$  при обходе вдоль  $l_P, l_T$ ) функция.

При вычислении контурных интегралов в (2.18) были использованы простейшие следствия определений  $\theta$  и  $\zeta, l_P$  и  $l_T$ :  $\nabla a dl_{P,T} = \nabla\theta dl_T = \nabla\zeta dl_P = 0$ ;  $\oint \nabla\theta dl_P = \oint \nabla\zeta dl_T = 2\pi$ , периодичность  $h$ :  $\oint \nabla h dl_{P,T} = 0$ . Очевидно, результат интегрирования в (2.18) определяется лишь топологией замкнутых контуров  $l_P$  и  $l_T$ , а непрерывные деформации  $l_P$  и  $l_T$ , описываемые уравнениями (2.16), на него не влияют. Это является следствием отсутствия у  $\mathbf{B}$  составляющей по нормали к поверхности  $a = \text{const}$ . Формально это можно показать, перейдя в (2.18) к интегрированию по  $dl_{P'}$  и  $dl_{T'}$ , соответствующим новым координатам  $\theta_x$  и  $\zeta_x$ , используя по-прежнему  $\mathbf{A}$  в виде (2.19). По определению контуры  $l_P$  и  $l_T, l_{P'}$  и  $l_{T'}$  задаются на поверхности  $a = \text{const}$  уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} l_P: \zeta = \zeta_0 = \text{const}; \quad l_T: \theta = \theta_0 = \text{const}; \\ l_{P'}: \zeta = \zeta_0 + f_\zeta; \quad l_{T'}: \theta = \theta_0 + f_\theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Вычисляя  $\oint \mathbf{A} dl_{P'}$  и  $\oint \mathbf{A} dl_{T'}$ , снова получаем  $\psi$  и  $\Phi$  соответственно, так как  $\oint \nabla\theta dl_{P'} = \oint \nabla\zeta dl_{T'} = 2\pi$  в силу периодичности (однозначности) функций  $f_\theta, f_\zeta$ , для которых интеграл  $\oint \nabla f_\alpha dl$  по любому замкнутому контуру равен нулю.

Представление  $\mathbf{B}$  (2.11) оказывается очень удобным при описании равновесных конфигураций. Оно явно учитывает два свойства магнитного поля — соленоидальность ( $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ) и отсутствие у него нормальной к магнитной поверхности составляющей ( $\mathbf{B}\nabla a = 0$ ). Лишь условие  $\mathbf{j}\nabla a = 0$  не выполняется автоматически при задании  $\mathbf{B}$  формулой (2.11) и требует решения уравнения (2.15), связывающего все входящие в (2.11) величины. При заданных  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\zeta(\mathbf{r})$  из него однозначно определяется через  $\psi'$  и  $\Phi'$  неизвестная функция  $\eta(\mathbf{r})$ . Будем далее называть (2.11) потоковым представлением магнитного поля.

Другое, токовое представление  $\mathbf{B}$ , дополняющее (2.11), легко получить, разлагая  $\mathbf{B}$  по векторам  $\nabla a, \nabla\theta, \nabla\zeta$ :

$$\mathbf{B} = X\nabla\theta + Y\nabla\zeta + Z\nabla a \quad (2.21)$$

и определяя  $X, Y, Z$  из геометрических уравнений для магнитного поля (2.9). Функции  $X$  и  $Y$ , как следует из уравнения  $\mathbf{j}\nabla a = \text{div}[\mathbf{B}\nabla a] = 0$ , связаны тем же уравнением

$$\partial X/\partial \xi - \partial Y/\partial \theta = 0, \quad (2.13a)$$

что и  $x, y$  в (2.12). Следовательно,

$$X = J(a) + \partial\varphi/\partial\theta; \quad Y = F(a) + \partial\varphi/\partial\xi, \quad (2.22)$$

где  $\varphi$  — периодическая по  $\theta$  и  $\xi$  функция. Подставляя эти выражения в (2.21), получаем с учетом  $\mathbf{B}\nabla a = 0$ :

$$2\pi\mathbf{B} = J(a)\nabla\theta + F(a)\nabla\xi - v\nabla a + \nabla\varphi, \quad (2.23)$$

где

$$v = (J\nabla\theta + F\nabla\xi + \nabla\varphi) \nabla a / |\nabla a|^2. \quad (2.24)$$

Для плотности тока  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  получаем отсюда

$$2\pi\mathbf{j} = [\nabla J\nabla\theta] + [\nabla F\nabla\xi] + [\nabla a\nabla v]. \quad (2.25)$$

Представление (2.23) дает простые выражения компонент  $B_i = \mathbf{B}e_i$ , поэтому его иногда называют ковариантным. Будем называть его также токовым, поскольку  $J$  и  $F$  — это продольный и поперечный токи, аналогичные потокам  $\Phi$  и  $\psi$  (2.18):

$$\left. \begin{aligned} J(a) &= \int \mathbf{j} d\mathbf{S}_T = \oint \mathbf{B} dl_P; \\ F(a) &= \int \mathbf{j} d\mathbf{S}_P = \oint \mathbf{B} dl_T. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Отметим, что представление (2.23) по виду в точности совпадает с (2.19) [а (2.25) с (2.11)], так что вычисления в (2.26) ничем не отличаются от только что проделанных при нахождении  $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}_T$  и  $\int \mathbf{B} d\mathbf{S}_P$ . Так же, как и (2.18), определения токов (2.26) являются, очевидно, инвариантными — не зависящими от деформаций  $l_P$  и  $l_T$  при фиксированной их топологии.

При выводе формулы (2.23), которую можно записать в виде

$$2\pi\mathbf{B} = J\nabla_a\theta + F\nabla_a\xi + \nabla_a\varphi, \quad (2.27)$$

где  $\nabla_a$  — поверхностный градиент:

$$\nabla_a \equiv \nabla - \nabla a (\nabla a) / |\nabla a|^2, \quad (2.28)$$

были использованы только два из трех уравнений (2.9) —  $\mathbf{B}\nabla a = 0$  и  $\mathbf{j}\nabla a = 0$ . Оставшееся уравнение  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  служит при заданных  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\xi(\mathbf{r})$  для нахождения  $\varphi$ :

$$\text{div}(J\nabla_a\theta + F\nabla_a\xi) + \text{div } \nabla_a\varphi = 0. \quad (2.29)$$

При замене в (2.27) и (2.29)  $\theta, \xi$  на  $\theta_x, \xi_x$  в соответствии с (2.16) функция  $\varphi$ , как нетрудно видеть, заменяется в них на

$$\varphi_x = \varphi + Jf_\theta + Ff_\xi. \quad (2.30)$$

Подведем итоги. Как видно из проведенного рассмотрения, в потоковых координатах два из трех «магнитных» уравнений (2.9)

элементарно решаются в самом общем виде, а третье сводится к эллиптическому уравнению, не содержащему дифференцирования по  $a$ : (2.15) для потокового представления (2.11) или (2.29) для токового (2.23). В ряде случаев мы будем пользоваться двумя представлениями одновременно. Уравнение (2.29) удобно при этом привести к виду

$$J \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \theta \nabla a]] + F \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta \nabla a]] + \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \varphi \nabla a]] = 2\pi B \nabla | \nabla a |^2, \quad (2.31)$$

содержащему  $\theta$  и  $\zeta$  в комбинациях вида  $[\nabla a [\nabla x^i \nabla a]]$ , как и в (2.15). Проще всего получить (2.31), умножая (2.27) на  $|\nabla a|^2$  и действуя на получившееся равенство оператором  $\operatorname{div}$ . Точно так же, умножая (2.11) векторно на  $\nabla a / |\nabla a|^2$  и действуя оператором  $\operatorname{div}$ , получаем эквивалентное (2.15) уравнение, связывающее  $\theta$ ,  $\zeta$  и  $\eta$ :

$$\psi' \operatorname{div} \nabla_a \zeta + \Phi' \operatorname{div} \nabla_a \theta + \operatorname{div} \nabla_a \eta = 2\pi [B \nabla a] \Delta | \Delta a |^{-2}, \quad (2.32)$$

которое удобно использовать вместе с (2.29).

Наличие двух представлений поля позволяет при исследовании равновесных конфигураций провести многие вычисления в общем виде, без использования какой-либо конкретной системы координат (см., например, разд. 2.3, 2.6, 4.3, 6.3—6.7). С другой стороны, удачным выбором  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\zeta(\mathbf{r})$  можно привести эти представления к более простому виду. Рассмотрим несколько полезных вариантов выбора потоковых координат.

## 2.2. Специальный выбор потоковых координат

Как уже отмечалось выше, угловые координаты  $\theta$  и  $\zeta$  могут быть введены на магнитной поверхности произвольно. От их выбора зависит в первую очередь вид функций  $\eta$  в (2.11) и  $\varphi$  в (2.27), которые однозначно определяются уравнениями (2.15) и (2.29). Свободой в выборе  $\theta$  и  $\zeta$  можно распорядиться, добавив к этим уравнениям, содержащим по три неизвестных функции —  $\theta(\mathbf{r})$ ,  $\zeta(\mathbf{r})$  и  $\eta(\mathbf{r})$  или  $\varphi(\mathbf{r})$ , по два каких-либо (непротиворечивых) дополнительных условия. В этом случае необходимо определять  $\theta(\mathbf{r})$  и  $\zeta(\mathbf{r})$  из получившейся системы уравнений.

**Потоковые координаты с выпрямленными силовыми линиями (ВСЛ).** Начнем с того, что рассмотрим класс потоковых систем координат  $(a, \theta_s, \zeta_s)$  с ВСЛ, получающихся при дополнительном требовании  $\eta=0$  [см. (2.11)]. Потоковое представление поля в них имеет вид [22, 58, 27]

$$2\pi B = [\nabla \psi \nabla \zeta_s] + [\nabla \Phi \nabla \theta_s], \quad (2.33)$$

угловые переменные  $\theta_s$  и  $\zeta_s$  связаны уравнением

$$\psi' \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta_s \nabla a]] + \Phi' \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \theta_s \nabla a]] = 0, \quad (2.34)$$

а силовые линии—прямые:

$$d\theta_s / d\zeta_s = B \nabla \theta_s / (B \nabla \zeta_s) = -\psi' / \Phi' \equiv \mu(a). \quad (2.35)$$

Токовое представление по-прежнему имеет вид (2.27), а функция  $\varphi_s$  определяется уравнением

$$(J\mu + F) \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta_s \nabla a]] + \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \varphi_s \nabla a]] = 2\pi \mathbf{B} \nabla | \nabla a |^2, \quad (2.36)$$

которое получается из (2.31) исключением  $\theta_s$  с помощью (2.34). Для расчета конфигураций с заданным током (например, стеллараторов с  $J=0$ ) более удобна другая форма записи (2.36)

$$(J\mu + F) \operatorname{div} \nabla_a \zeta_s + 2\pi (J/\Phi') [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{1}{|\nabla a|^2} + \operatorname{div} \nabla_a \varphi_s = 0. \quad (2.37)$$

Это соотношение легко получить из (2.29) и (2.32).

Для нахождения  $v_s$  нужно использовать уравнение равновесия  $\nabla p = [\mathbf{j} \mathbf{B}]$ , приводящееся в системе с ВСЛ к виду

$$2\pi \mathbf{B} \nabla v_s = p' V' (1/\sqrt{g_s} - 4\pi^2/V'), \quad (2.38)$$

где  $\sqrt{g_s} \equiv ([\nabla a \nabla \theta_s] \nabla \zeta_s)^{-1}$ .

Завершая сводку основных формул в потоковых координатах с ВСЛ, приведем выражения для величин  $\mathbf{B}^2$  и  $\mathbf{j} \mathbf{B}$ , которые приходится вычислять при изучении равновесия и устойчивости:

$$\mathbf{B}^2 = \langle \mathbf{B}^2 \rangle V' / (4\pi^2 \sqrt{g_s}) + \mathbf{B} \nabla \varphi_s / (2\pi); \quad (2.39)$$

$$\mathbf{j} \mathbf{B} = \frac{\langle \mathbf{j} \mathbf{B} \rangle V'}{4\pi^2 \sqrt{g_s}} + \mathbf{j} \nabla \frac{\varphi_s}{2\pi} + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{v_s}{2\pi} + \nabla a \left[ \nabla \frac{\varphi_s}{2\pi} \nabla \frac{v_s}{2\pi} \right]. \quad (2.40)$$

Здесь использованы обозначения (подробнее — см. разд. 6.3)  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle V' = F\Phi' - J\psi'$ ;  $\langle \mathbf{j} \mathbf{B} \rangle V' = J'F - JF'$ ; скобки  $\langle \rangle$  — усреднение по слою между близкими магнитными поверхностями.

Формулы (2.39) и (2.40) получаются умножением токового представления  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{B}$  в виде (2.33) и на  $\mathbf{j}$  в виде (2.25).

К координатам с ВСЛ легко перейти от любых фиксированных  $\theta$  и  $\zeta$  путем замены одной из координат, полагая в (2.16)

$$f_\theta = -\eta/\Phi'; \quad f_\zeta = 0 \quad (2.41)$$

или

$$f_\theta = 0; \quad f_\zeta = -\eta/\psi'. \quad (2.42)$$

Последующее преобразование

$$\theta_s = \theta'_s + \psi'_s G; \quad \zeta_s = \zeta'_s - \Phi'_s G, \quad (2.43)$$

оставляющее неизменным представление поля (2.33), позволяет охватить все множество систем с ВСЛ.

Мы использовали одно ( $\eta=0$ ) из двух возможных ограничений для конкретизации координат  $\theta$  и  $\zeta$ . При этом их выбор остается еще достаточно произвольным — для двух переменных  $\theta_s$  и  $\zeta_s$  имеем лишь одно уравнение (2.34). Рассмотрим несколько способов однозначного выделения систем с ВСЛ.

**Система координат с ВСЛ с заданным  $\zeta_s(\mathbf{r})$ .** Конкретное задание  $\zeta_s(\mathbf{r})$  является наиболее простым и распространенным спосо-

бом введения тороидальной координаты. Обычно в качестве  $\zeta_s$  выбирается  $\zeta_g = 2\pi s/L$ , где  $s$  — текущая, а  $L$  — полная длина геометрической оси. Полоидальный угол  $\theta_g$  определяется при этом неоднородным уравнением с заданной правой частью ( $\mu = -\psi'/\Phi'$ )

$$\operatorname{div} [\nabla a [\nabla \theta_g \nabla a]] = \mu \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta_g \nabla a]]. \quad (2.44)$$

Мы будем пользоваться такой системой координат в гл. 4, 5. В случае аксиальной симметрии правая часть (2.44) равна нулю, угол  $\theta_g$  не зависит явно от потоков.

**Координаты Хамады [114]**— $\eta_H = 0$ ,  $v_H = 0$ . При замене в общем токовом представлении  $\mathbf{B}$  (2.23)  $\theta$  и  $\zeta$  на  $\theta_x$  и  $\zeta_x$  (2.16) мы должны, сохраняя вид (2.23), одновременно заменить  $\varphi$  на  $\varphi_x$  (2.30), а  $v$  на  $v_x$ :

$$v_x = v + J'f_\theta + F'f_\zeta. \quad (2.45)$$

Функция  $\eta$  в потоковом представлении (2.11) при таком переходе  $(\theta, \zeta) \rightarrow (\theta_x, \zeta_x)$  преобразуется в  $\eta_x$  (2.17). Таким образом, система координат Хамады  $(a, \theta_H, \zeta_H)$  получается из произвольной потоковой системы  $(a, \theta, \zeta)$  путем деформации контуров  $l_P$  и  $l_T$  по формулам (2.16) с  $f_\theta$  и  $f_\zeta$ , удовлетворяющими уравнениям:

$$\Phi'f_\theta + \psi'f_\zeta = -\eta, \quad J'f_\theta + F'f_\zeta = -v. \quad (2.46)$$

Обычно переход к координатам Хамады осуществляется в два приема [27, 60]. Сначала строится система с ВСЛ (например, с заданным  $\zeta$ ) с требованием лишь  $\eta = 0$ , а потом с помощью преобразования (2.43), не нарушающего условия выпрямленности силовых линий  $\eta = 0$ , определяется нужная система  $(a, \theta_H, \zeta_H)$ , в которой и  $v_H = 0$ . Функции  $v_H$  и  $v_s$ , соответствующие координатам Хамады и произвольной системе с ВСЛ, связаны согласно (2.45) уравнением

$$v_H = v_s + (J'\psi' - F'\Phi') G_H. \quad (2.47)$$

Полагая  $v_H = 0$ , определяем отсюда  $G_H$ , описывающую переход (2.43)  $(\theta_s, \zeta_s) \rightarrow (\theta_H, \zeta_H)$ :

$$G_H = -v_s / (\rho'V'). \quad (2.48)$$

Мы воспользовались здесь уравнением Крускала — Кульсруда (1.3). Для нахождения  $v_s$  нужно использовать (2.38), поэтому фактически функция  $G_H$  должна определяться из

$$2\pi \mathbf{B} \nabla G_H = 4\pi^2 / V' - 1 / \sqrt{g_s}. \quad (2.49)$$

Представления поля (2.11) и (2.23) в координатах Хамады принимают вид

$$2\pi \mathbf{B} = [\nabla \psi \nabla \zeta_H] + [\nabla \Phi \nabla \theta_H]; \quad (2.50)$$

$$2\pi \mathbf{B} = J \nabla \theta_H + F \nabla \zeta_H + \nabla \varphi_H. \quad (2.51)$$

Входящие сюда функции  $\theta_H$ ,  $\zeta_H$  и  $\Phi_H$  связаны уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \psi' \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta_H \nabla a]] + \Phi' \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \theta_H \nabla a]] &= 0; \\ \operatorname{div} (J \nabla_a \theta_H + F \nabla_a \zeta_H) + \operatorname{div} \nabla_a \Phi_H &= 0; \\ \nabla a \nabla \Phi_H &= - (J \nabla \theta_H + F \nabla \zeta_H) \nabla a. \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

Одним из способов их решения является описанный выше поэтапный переход от произвольно заданной потоковой системы координат к системе с ВСЛ и затем определение функции  $G_H$ , дающей связь

$$\theta_s = \theta_H + \psi' G_H; \quad \zeta_s = \zeta_H - \Phi' G_H. \quad (2.53)$$

После того, как найдены  $\theta_H$  и  $\zeta_H$ , функцию  $\Phi_H$  можно определить приравнявая (2.50) и (2.51).

В координатах Хамады линии плотности тока

$$2\pi \mathbf{j} = [\nabla J \nabla \theta_H] + [\nabla F \nabla \zeta_H], \quad (2.54)$$

как и линии  $\mathbf{B}$ , — прямые. Кроме того, как следует из уравнения равновесия (2.38), простой вид имеет  $\sqrt{g_H}$ :

$$\sqrt{g_H} = V' / (4\pi^2). \quad (2.55)$$

Если в качестве  $a$  взять объем  $V$ , заключенный внутри магнитной поверхности, то  $V' = 1$ ,  $\sqrt{g_H} = 1/4\pi^2$ .

Независимость  $\sqrt{g_H}$  от углов (и от  $a$  при  $a = V$ ), выпрямленность линий поля и тока обусловили широкое использование координат Хамады в аналитических расчетах, особенно в исследованиях по локальной устойчивости [27, 30, 29, 132]. Отметим, что связь (2.55)  $\sqrt{g_H}$  с  $V'$  и выпрямленность линий тока ( $\mathbf{v}_H = 0$ ) позволяют получить для величин  $\mathbf{B}^2$  и  $\mathbf{jB}$ , входящих в критерии устойчивости (см. гл. 6), простые выражения:

$$\mathbf{B}^2 = \langle \mathbf{B}^2 \rangle + \mathbf{B} \nabla \Phi_H / (2\pi); \quad (2.56)$$

$$\mathbf{jB} = \langle \mathbf{jB} \rangle + \mathbf{j} \nabla \Phi_H / (2\pi), \quad (2.57)$$

эквивалентные (2.39) и (2.40), причем операторы  $\mathbf{B} \nabla$  и  $\mathbf{j} \nabla$  принимают максимально простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} \nabla &= \frac{2\pi}{V'} \left( \Phi' \frac{\partial}{\partial \zeta_H} - \psi' \frac{\partial}{\partial \theta_H} \right); \\ \mathbf{j} \nabla &= \frac{2\pi}{V'} \left( J' \frac{\partial}{\partial \zeta_H} - F' \frac{\partial}{\partial \theta_H} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

**Координаты Бузера** [116] —  $\eta_B = 0$ ,  $\Phi_B = 0$ . Более универсальной, удобной как для аналитических [116—119], так и для численных [107, 133, 96, 74] вычислений, оказалась система координат с ВСЛ, предложенная Бузером [116—118].

Два представления поля в координатах Бузера ( $a, \theta_B, \zeta_B$ ) имеют вид

$$2\pi\mathbf{B} = [\nabla\psi\nabla\zeta_B] + [\nabla\Phi\nabla\theta_B]; \quad (2.59)$$

$$2\pi\mathbf{B} = J\nabla_a\theta_B + F\nabla_a\zeta_B, \quad (2.60)$$

а детерминант метрического тензора  $\sqrt{g_B} = \det g_{ik}^B$  пропорционален  $1/B^2$ . Это свойство легко установить, перемножив (2.59) и (2.60):

$$\mathbf{B}^2 = \frac{1}{4\pi^2} (F\Phi' - J\psi') [\nabla_a\nabla\theta_B] \nabla\zeta_B = \frac{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'}{4\pi^2 \sqrt{g_B}}. \quad (2.61)$$

Уравнения для функций  $\theta_B$  и  $\zeta_B$ , получающиеся из (2.29) и (2.32) при  $\varphi_B=0, \eta_B=0$ ,

$$\left. \begin{aligned} J \operatorname{div} \nabla_a \theta_B + F \operatorname{div} \nabla_a \zeta_B &= 0; \\ \frac{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'}{F} \operatorname{div} \nabla_a \theta_B &= 2\pi [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{1}{|\nabla a|^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

более просты, чем (2.52) для  $\theta_H$  и  $\zeta_H$ . Решения этих уравнений можно искать, задавая произвольные угловые переменные на поверхности  $a = \text{const}$ , определяя из (2.15) и (2.29) соответствующие им функции  $\eta$  и  $\varphi$  и переходя затем к новым угловым переменным  $\theta_B, \zeta_B$ , в которых  $\eta_B=0, \varphi_B=0$ .

Переход от произвольной потоковой системы координат к ( $a, \theta_B, \zeta_B$ ) производится по формулам (2.16) с  $f_\theta, f_\zeta$ , выбранными так, что

$$\eta_B = \eta + \Phi' f_\theta + \psi' f_\zeta = 0; \quad (2.63)$$

$$\varphi_B = \varphi + J f_\theta + F f_\zeta = 0. \quad (2.64)$$

Как и в предыдущем случае, удобно искать ( $a, \theta_B, \zeta_B$ ) как частный случай системы с ВСЛ, определяя функцию  $G_B$ , связывающую  $\theta_s, \zeta_s$  известной (заданной) системы с ВСЛ с  $\theta_B, \zeta_B$ . При этом в соответствии с (2.43)  $f_\theta = \psi' G_B, f_\zeta = -\Phi' G_B$ , уравнение (2.63) удовлетворяется тождественно ( $\eta_s=0$ ), а (2.64) сводится к

$$\varphi_s + (J\psi' - F\Phi') G_B = 0. \quad (2.65)$$

Отсюда следует

$$G_B = \varphi_s / \langle \mathbf{B}^2 \rangle V' = \varphi_s / \mathbf{B}^2 \sqrt{g_B}. \quad (2.66)$$

Теперь можно записать связь  $\theta_B, \zeta_B$  с угловыми переменными  $\theta_s, \zeta_s$  произвольной потоковой системы с ВСЛ в виде

$$\left. \begin{aligned} \theta_B &= \theta_s - \frac{\psi'}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'} \varphi_s; \\ \zeta_B &= \zeta_s + \frac{\Phi'}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'} \varphi_s. \end{aligned} \right\} \quad (2.67)$$

Напомним, что функция  $\varphi_s$  определяется уравнением (2.36).



«Натуральные» координаты с ВСЛ [121]. Угловые переменные  $\theta_s, \zeta_s$  произвольной потоковой системы с ВСЛ связаны соотношениями (2.34) и в общем случае зависят не только от геометрии магнитных поверхностей, определяемой функцией  $a(\mathbf{r})$ , но и от явно входящих в (2.34) потоков  $\psi$  и  $\Phi$ . Произволом в выборе  $\theta_s$  и  $\zeta_s$  можно воспользоваться, выбирая  $\zeta_s$  так, чтобы обратилось в нуль первое слагаемое в (2.34). В этом случае получим зависящие лишь от  $a(\mathbf{r})$  координаты  $\theta_N, \zeta_N$ , названные в [121] натуральными, которые удовлетворяют уравнениям [121, 134]:

$$\operatorname{div} [\nabla a [\nabla \theta_N \nabla a]] = 0; \quad \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta_N \nabla a]] = 0. \quad (2.68)$$

Уравнением для функции  $\varphi_N$ , фигурирующей в токовом представлении  $\mathbf{B}$  (2.23) при  $\theta = \theta_N, \zeta = \zeta_N$ , служит

$$2\pi \mathbf{B} \nabla | \nabla a |^2 = \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \varphi_N \nabla a]]. \quad (2.69)$$

Оно, очевидно, является следствием (2.31) при дополнительных условиях (2.68).

Определение  $\theta_N$  и  $\zeta_N$  сводится к решению двух неоднородных эллиптических уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} [\nabla a [\nabla f_\theta \nabla a]] &= \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \theta \nabla a]]; \\ \operatorname{div} [\nabla a [\nabla f_\zeta \nabla a]] &= \operatorname{div} [\nabla a [\nabla \zeta \nabla a]]. \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

для периодических функций  $f_\theta$  и  $f_\zeta$ , с помощью которых осуществляется переход от опорных (заданных) координат  $\theta, \zeta$  к  $\theta_N, \zeta_N$ :

$$f_\theta = \theta - \theta_N; \quad f_\zeta = \zeta - \zeta_N. \quad (2.71)$$

Отыскание  $f_\theta$  и  $f_\zeta$  из (2.70) эквивалентно построению произвольной системы с ВСЛ и нахождению затем одной функции, например  $f_\theta (f_\zeta = -f_\theta \Phi' / \psi')$ , из первого уравнения (2.70) с  $\theta = \theta_s$ .

Натуральные координаты удобны в аналитических расчетах, особенно при явном параметрическом задании формы магнитных поверхностей. В случае аксиальной симметрии  $(a, \theta_N, \zeta_N)$  совпадает с рассмотренной выше системой с ВСЛ с заданным  $\zeta$ .

Все системы с ВСЛ хороши тем, что в них простой вид имеет потоковое представление поля. Системы Хамады и Бузера строятся так, чтобы в них упрощалось и токовое представление. Рассмотрим теперь аналогичные натуральным потоковые координаты  $(a, \theta_c, \zeta_c)$  без ВСЛ, но с выпрямленными линиями  $[\mathbf{B} \nabla a]$  и соответственно линиями диамагнитного тока  $\mathbf{j}_\perp = \rho' [\mathbf{B} \nabla a] / \mathbf{B}^2$ .

Конатуральные координаты с  $\varphi_c = 0$  [121]. Названные в [121] конатуральными координаты  $(a, \theta_c, \zeta_c)$  задаются так, чтобы токовое представление поля было таким же, как (2.60) в координатах Бузера

$$2\pi \mathbf{B} = J \nabla_a \theta_c + F \nabla_a \zeta_c, \quad (2.72)$$

а угловые координаты определялись лишь геометрией магнитных поверхностей независимо от  $J$  и  $F$ . Уравнения для  $\theta_c, \zeta_c$  получают

ся из (2.29), где нужно положить  $\varphi = \varphi_c = 0$  и приравнять нулю одно из слагаемых [121, 134]:

$$\operatorname{div} \nabla_a \theta_c = 0; \quad \operatorname{div} \nabla_a \xi_c = 0. \quad (2.73)$$

Для функции  $\eta_c$ , входящей в потоковое представление поля (2.11) при  $\theta = \theta_c$ ,  $\xi = \xi_c$ , получаем из (2.32)

$$\operatorname{div} \nabla_a \eta_c = 2\pi [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{1}{|\nabla a|^2}. \quad (2.74)$$

Оператор в правой части (2.74) имеет простой вид, поскольку линия вектора  $[\mathbf{B} \nabla a]$  в координатах  $\theta_c$ ,  $\xi_c$  — прямые:

$$2\pi [\mathbf{B} \nabla a] = J [\nabla \theta_c \nabla a] + F [\nabla \xi_c \nabla a]. \quad (2.75)$$

В конатуральных координатах

$$\mathbf{B}^2 = \frac{\langle \mathbf{B}^2 \rangle V'}{4\pi^2 \sqrt{g_c}} + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{\eta_c}{2\pi}; \quad (2.76)$$

$$\mathbf{j} \mathbf{B} = \frac{\langle \mathbf{j} \mathbf{B} \rangle V'}{4\pi^2 \sqrt{g_c}} + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{\nu_c}{2\pi}. \quad (2.77)$$

Ниже будет показано, что конатуральная система координат является в некотором смысле взаимной к натуральной. Одновременное использование этих двух систем координат удобно при работе со смешанным, или полоидальным, представлением поля  $\mathbf{B}$  — через  $\psi$  и  $F$ . Для того чтобы перейти к нему, рассмотрим связь токов с потоками.

### 2.3. Связь токов с потоками

Линейная связь токов  $J$  и  $F$  с потоками  $\Phi$  и  $\psi$  является следствием уравнения Максвелла  $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$ . Получим эту связь, используя два представления поля — токовое (2.27) и потоковое (2.11) (отметим, что уравнением  $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$  мы пользовались, чтобы убедиться, что  $J$  и  $F$  в (2.27) — продольный и внешний полоидальный токи).

Пусть токовое представление поля задано в произвольной потоковой системе координат, а потоковое — в натуральной, описанной в предыдущем разделе. Приравнивая их, получаем векторное уравнение

$$J \nabla_a \theta + F \nabla_a \xi + \nabla_a \varphi = \psi' [\nabla a \nabla \xi_N] + \Phi' [\nabla a \nabla \theta_N], \quad (2.78)$$

которое эквивалентно двум скалярным (проекции на  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ ;  $\mathbf{e}_i \nabla x^j = \delta_{ij}$ )

$$B_l = A_{lm} \sqrt{g_N} B^m, \quad (2.79)$$

где  $l, m = 2, 3$ ;  $\sqrt{g_N} \equiv ([\nabla a \nabla \theta_N] \nabla \xi_N)^{-1}$ ;

$$A_{lm} \equiv \mathbf{e}_l \mathbf{e}_{Nm} / \sqrt{g_N}; \quad (2.80)$$

слева в (2.79) — компоненты токового представления, а справа — потокового. Усредненные по  $\theta$  и  $\zeta$  уравнения (2.79)

$$\left. \begin{aligned} J &= -\alpha_{22}^0 \Psi' + \alpha_{23}^0 \Phi'; \\ F &= -\alpha_{32}^0 \Psi' + \alpha_{33}^0 \Phi' \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

дают выражения для токов через магнитные потоки и геометрические коэффициенты

$$\alpha_{lm}^0(a) \equiv \langle A_{lm} \rangle_{\theta, \zeta}. \quad (2.82)$$

Соответственно магнитные потоки можно выразить через токи

$$\left. \begin{aligned} -\Psi'(a) &= \lambda_{22}^0 J + \lambda_{32}^0 F; \\ \Phi'(a) &= \lambda_{23}^0 J + \lambda_{33}^0 F, \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

где  $\lambda_{lm}^0$  — «удельные индуктивности» [135], связанные с  $\alpha_{lm}^0$  соотношениями:

$$\lambda_{22}^0/\alpha_{33}^0 = \lambda_{33}^0/\alpha_{22}^0 = -\lambda_{23}^0/\alpha_{32}^0 = -\lambda_{32}^0/\alpha_{23}^0 = 1/D. \quad (2.84)$$

Здесь

$$D(a) = \alpha_{22}^0 \alpha_{33}^0 - \alpha_{23}^0 \alpha_{32}^0 = (\lambda_{22}^0 \lambda_{33}^0 - \lambda_{23}^0 \lambda_{32}^0)^{-1}. \quad (2.85)$$

Рассмотрим свойства величин  $A_{lm}$  (2.80). Любой вектор  $\mathbf{u} = u_i \nabla x^i$ , ортогональный к  $\nabla a$ ,  $\mathbf{u} \nabla a = 0$ , может быть записан в виде

$$\mathbf{u} = [\nabla a [\mathbf{u} \nabla a]] / |\nabla a|^2 = u_i \nabla_a x^i, \quad (2.86)$$

где  $u_i = u e_i$ ;  $e_i$  — базисные векторы произвольной потоковой системы координат  $x^i$ . Представим в таком виде базисные векторы  $e_{N2}$  и  $e_{N3}$  натуральной системы координат:

$$e_{Nm} / \sqrt{g_N} \equiv [\nabla x_N^{m+1} \nabla x_N^{m-1}] = A_{lm} \nabla_a x^l. \quad (2.87)$$

Здесь и далее для краткости угловые координаты  $\theta, \zeta$  обозначаются как  $x$  с верхними индексами  $l, m, n$ , принимающими в отличие от  $i, j, k$  только два значения:  $l, m, n = 2, 3$  ( $x^2 = \theta, x^3 = \zeta$ ). При этом подразумевается, что  $x^{l \pm 3} = x^l, x^1 = a$ . Используя условия натуральности (2.68), которые можно записать как  $\text{div}[\nabla a e_{Nm} / \sqrt{g_N}] = 0$ , для  $A_{lm}$  получаем

$$[\nabla a \nabla x^l] \nabla A_{lm} = 0 \quad (2.88)$$

или в раскрытом виде

$$\partial A_{2m} / \partial x^3 - \partial A_{3m} / \partial x^2 = 0. \quad (2.89)$$

Из этого уравнения следует, что

$$A_{lm} = \alpha_{lm}^0(a) + \partial h_m / \partial x^l, \quad (2.90)$$

где  $h_2$  и  $h_3$  — периодические по  $x^2$  и  $x^3$  функции. Таким образом, величины  $\alpha_{lm}^0$ , связывающие токи с потоками, получаются из  $A_{lm}$

(2.80) усреднением лишь по одной угловой координате  $x^l$  произвольной потоковой системы координат с базисными векторами  $e_i$  в (2.80), что является следствием натуральности координат  $x_N^m$ .

Отметим, что при фиксированной топологии системы координат  $x^i = (a, \theta, \zeta)$  величины  $\alpha_{lm}^0$ , получаемые таким усреднением (2.80), не зависят от выбора  $\theta$  и  $\zeta$ . Действительно, если ограничиться классом координатных систем, угловые переменные которых связаны преобразованием (2.16), не изменяющим числа зацеплений контуров  $\theta = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$ , то, подставив (2.16) в (2.87), которое с учетом (2.90) принимает вид

$$e_{Nm} / \sqrt{g_N} = \alpha_{lm}^0 \nabla_a x^l + \nabla_a h_m, \quad (2.91)$$

получим уравнение

$$e_{Nm} / \sqrt{g_N} = \alpha_{lm}^0 \nabla_a x^l + \nabla_a (h_m + \alpha_{lm}^0 f_l). \quad (2.92)$$

Здесь  $f_2 = f_\theta$ ,  $f_3 = f_\zeta$ . Умножение (2.92) на базисный вектор  $e_{xl}$  новой системы координат  $(a, \theta_x, \zeta_x)$  дает

$$A_{lm}^* = \alpha_{lm}^0 + \frac{\partial}{\partial x^l} (h_m + \alpha_{lm}^0 f_l), \quad (2.93)$$

что и доказывает независимость средних  $\langle A_{lm} \rangle^{x^l}$  от выбора координат  $x^l$ .

Как видно из (2.93), координаты  $a, \theta, \zeta$  можно выбрать так, чтобы в (2.90)  $h_2 = h_3 = 0$ , т. е.  $A_{lm} = \alpha_{lm}^0$ . Обладающую таким свойством систему координат естественно назвать дополнительной к натуральной. Покажем, что единственной системой, дополнительной к натуральной, является конатуральная [134]. Применив операцию  $\text{div}$  к (2.91), для  $h_m$  получим уравнение

$$\alpha_{lm}^0 \text{div} \nabla_a x^l + \text{div} \nabla_a h_m = 0. \quad (2.94)$$

Если  $h_m = 0$ , то однородная система двух уравнений (2.94) с ненулевым определителем сводится к уравнениям (2.73), которыми определяется конатуральная система координат. Если же в (2.94) положить  $x^l = x_c^l$  ( $\text{div} \nabla_a x^l = 0$ ), то для  $n_m$  получится однородное уравнение  $\text{div} \nabla_a h_m = 0$ , не имеющее нетривиального периодического решения. Итак,

$$e_{cl} e_{Nm} / \sqrt{g_N} = \alpha_{lm}^0. \quad (2.95)$$

Отметим одно важное следствие этого соотношения. Вычислив детерминант матрицы  $\alpha_{lm}^0$ , непосредственно получим

$$D(a) = \det \alpha_{lm}^0 = \frac{[e_{N2} e_{N3}] [e_{c2} e_{c3}]}{g_N} = \frac{\sqrt{g_c}}{\sqrt{g_N}} |\nabla_a|^2. \quad (2.96)$$

С учетом соотношения (2.95) уравнение (2.86) дает следующую связь базисных векторов  $e_{Nm}$  и  $\nabla_a x_c^l$ :

$$e_{Nm} \sqrt{g_N} = \alpha_{lm}^0 \nabla_a x_c^l. \quad (2.97)$$

Эта связь замечательна тем, что коэффициенты  $\alpha_{lm}^0$  не зависят от угловых переменных. Она позволяет без решения пары уравнений (2.73) находить базисные векторы конатуральной системы координат, если известна натуральная, и наоборот [121, 134].

Независимость  $\alpha_{lm}^0$  от выбора потоковых переменных  $x^l$  позволяет найти связь  $\alpha_{lm}^0$  с метрическими коэффициентами  $g_{Nlm}/\sqrt{g_N}$  натуральных координат:

$$g_{Nlm}/\sqrt{g_N} = \alpha_{lm}^0 + \partial^2 h / (\partial x_N^l \partial x_N^m), \quad (2.98)$$

где  $h$  — периодическая по  $\theta_N$  и  $\zeta_N$  функция. Чтобы получить эту связь, достаточно в (2.80) положить  $e_l = e_{Nl}$  и воспользоваться затем уравнениями (2.90). Из (2.98) вытекает симметрия матрицы  $\alpha_{lm}^0$ :

$$\alpha_{23}^0 = \alpha_{32}^0. \quad (2.99)$$

Получим теперь выражения для  $\alpha_{lm}^0$  через метрические коэффициенты  $g_{lm}/\sqrt{g}$  произвольной потоковой системы координат. По определению  $e_i = \sqrt{g} [\nabla x^{i+1} \nabla x^{i-1}]$ . Соотношения (2.71) позволяют представить векторы  $e_N/\sqrt{g_N}$  в виде

$$e_N/\sqrt{g_N} = e_m/\sqrt{g} + [\nabla \eta_m \nabla a]. \quad (2.100)$$

Здесь для компактности записи использованы обозначения  $\eta_2 = -f_\zeta$ ,  $\eta_3 = f_\theta$ . Умножая это уравнение на  $e_l$  и исключая с помощью (2.90) возникающую при этом в левой части величину  $A_{lm}$ , получаем

$$g_{lm}/\sqrt{g} + e_l [\nabla \eta_m \nabla a] = \alpha_{lm}^0 + e_l \nabla h_m. \quad (2.101)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha_{lm}^0 &= \left\langle \frac{g_{lm}}{\sqrt{g}} + e_l [\nabla \eta_m \nabla a] \right\rangle_{x^l} = \\ &= \left\langle \frac{g_{lm}}{\sqrt{g}} + \frac{g_{l2}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \eta_m}{\partial x^3} - \frac{g_{l3}}{\sqrt{g}} \frac{\partial \eta_m}{\partial x^2} \right\rangle_{x^l}. \end{aligned} \quad (2.102)$$

#### 2.4. Общая постановка задач равновесия

Как уже видно из предыдущего изложения, условия равновесия плазмы в магнитном поле разделяются на одномерные интегральные, определяющие связь между поверхностными (зависящими только от метки  $a$  магнитной поверхности) функциями  $\rho$ ,  $J$ ,  $F$ ,  $\Phi$ ,  $\psi$ , и локальные — уравнения для определения формы магнитных поверхностей  $a(r)$ . Пять упомянутых интегральных характеристик связаны тремя уравнениями — уравнением Крускала — Кульсруда

(1.3) и уравнениями связи токов с потоками (2.81):

$$\left. \begin{aligned} \rho'V' &= J'\psi' - F'\Phi'; \\ J &= -\alpha_{22}^0(a)\psi' + \alpha_{23}^0(a)\Phi'; \\ F &= -\alpha_{32}^0(a)\psi' + \alpha_{33}^0(a)\Phi'. \end{aligned} \right\} \quad (2.103)$$

Здесь  $V(a)$  — объем, ограниченный тороидальной поверхностью;  $a(r) = \text{const}$  — чисто геометрическая характеристика, остальные пять — физические. Из этих соотношений следует, что независимых физических поверхностей функций — две. Поэтому задачу о равновесии в простейшем виде можно сформулировать так: при заданных граничной тороидальной магнитной поверхности и двух функциональных зависимостях, например  $p(\psi)$  и  $F(\psi)$  (либо  $p(\psi)$  и  $q(\psi) = -\Phi'/\psi'$ ; либо  $p(\psi)$  и  $J(\psi)$  и т. д.), найти систему внутренних магнитных поверхностей. В более сложном варианте задачи вместо граничной магнитной поверхности можно задать токи во внешних проводниках и положение лимитера, поглощающего плазму со всех магнитных силовых линий, доходящих до него. Разумеется, чтобы решение существовало в трехмерном (несимметричном) случае, граничная поверхность или распределение внешних токов должны быть подобраны специально. Действительно, при  $J=0$ , например, магнитные поверхности существуют, если только граничная поверхность винтообразная. Но и при этом типичной ситуацией является островная структура, а не система вложенных торов. Более того, строго математически уравнение (2.10) в трехмерном случае не имеет, вероятно, вообще решения в виде системы вложенных торов при плавной (без особенностей) плотности тока  $\mathbf{j}$ . Как же следует тогда понимать введение системы потоковых координат? При ее введении мы основывались на двух «магнитных» уравнениях  $\mathbf{B}\nabla a = 0$ ,  $\mathbf{j}\nabla a = 0$ , что с учетом соленоидальности вектора  $\mathbf{B}$  и тождества  $\text{div}[\mathbf{B}\nabla a] = \nabla a \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{j}\nabla a$  составляет систему уравнений (2.9)

$$\text{div } \mathbf{B} = 0; \quad \mathbf{B}\nabla a = 0; \quad \text{div}[\mathbf{B}\nabla a] = 0$$

для векторного поля  $\mathbf{B}$ . Последние два уравнения эквивалентны одному векторному

$$[\mathbf{j}\mathbf{B}] = Z(r)\nabla a. \quad (2.104)$$

При заданной функции  $a(r)$  и двух поверхностных функциях, скажем  $\Phi(a)$ ,  $\psi(a)$ , векторное поле  $\mathbf{B}$  определяется с помощью двух вспомогательных функций  $\theta_s(r)$ ,  $\zeta_s(r)$ , удовлетворяющих уравнению (2.34), формулой (2.33)

$$2\pi\mathbf{B} = [\nabla\Phi\nabla\theta_s] + [\nabla\psi\nabla\zeta_s].$$

Тогда уравнение (2.104) служит для определения функции  $Z(r)$ :

$$Z(r) = \mathbf{j}[\mathbf{B}\nabla a]/|\nabla a|^2. \quad (2.105)$$

Если бы удалось подобрать поверхности  $a(r) = \text{const}$  так, что

$Z(\mathbf{r}) = p'(a)$ , то тем самым было бы найдено решение уравнения равновесия (2.10). Более реалистичная постановка состоит в поисках решения с функцией  $Z(\mathbf{r})$ , приближающейся к  $p'(a)$ . Можно ввести меру отклонения  $\delta(\mathbf{r})$  функции  $Z(\mathbf{r})$  на поверхности  $a(\mathbf{r}) = \text{const}$  от поверхностной функции  $f(a)$  формулой

$$Z(\mathbf{r}) = f(a) [1 + \delta(\mathbf{r})] \quad (2.106)$$

и говорить, что уравнение равновесия удовлетворено с точностью  $\delta_{\text{max}}$ . При этом не исключено обращение  $f(a)$  в нуль на рациональных магнитных поверхностях, где  $q(a_{nm}) = n/m$ . Действительно, если  $f$  (т. е.  $p'$ ) рассматривать как возмущение, то линейный отклик (плотность тока), пропорциональный  $\dot{f}$ , как видно из нижеследующей формулы (2.109), содержит резонансный знаменатель  $m\dot{q} - n$  и может быть конечным лишь при  $p'(a_{mn}) = 0$ . Альтернативой являются особенности на плотности тока (физически допустимые при идеальной электропроводности) или островная структура.

Запишем уравнение (2.104) в системе координат с ВСЛ

$$4\pi^2 \sqrt{g_s} Z = J' \psi' - F' \Phi' - \left( \Phi' \frac{\partial}{\partial \zeta_s} - \psi' \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) v_s. \quad (2.107)$$

Как видно, в нем можно выделить среднюю и переменную части

$$\left. \begin{aligned} V' \langle Z \rangle &= J' \psi' - F' \Phi'; \\ \left( \Phi' \frac{\partial}{\partial \zeta_s} - \psi' \frac{\partial}{\partial \theta_s} \right) v_s &= V' f \left\{ 1 + \langle \delta \rangle - \frac{4\pi^2 \sqrt{g_s}}{V'} (1 + \delta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

Представляя правую часть в виде разложения  $i\psi' \Sigma C_{mn} \exp [i(m\theta_s - n\zeta_s)]$ , получаем формальное решение последнего уравнения в виде  $\Sigma v_{mn} \exp [i(m\theta_s - n\zeta_s)]$ , где

$$v_{mn} = C_{mn} / (nq - m). \quad (2.109)$$

В случае осевой или винтовой симметрии ( $\partial/\partial \zeta_s = 0$ ) отличны от нуля только коэффициенты с  $n=0$ :  $v_{m0} = -C_{m0}/m$ . Очевидно, что эти коэффициенты конечны. В трехмерном же случае обязательно возникают малые знаменатели (о чем упоминалось выше), свидетельствуя о возможности расщепления системы вложенных поверхностей. Подбор внешних условий (граничной поверхности или токов во внешних обмотках) соответствует выбору такой конфигурации, в которой коэффициенты  $C_{mn}$  достаточно малы, так что с точки зрения физики удержания расщеплением можно пренебречь.

## 2.5. Постановка задач равновесия на основе двумерных уравнений. Описание эволюции равновесия

Равновесие в системах с винтовой симметрией и (в стеллараторном приближении) в обычных стеллараторах с плоской осью и винтовыми полями описывается однотипными двумерными эллиптическими уравнениями (3.8) и (4.34), аналогичными уравнению Грэда — Шафранова (4.36) для аксиально-симметричных систем.

Сходство этих уравнений позволяет (после очевидного обобщения) использовать для их решения методы, развитые для токамака, достаточно полный обзор которых содержится в [108].

При расчете равновесия на основе этих двумерных уравнений необходимо задать две поверхностные функции. Наиболее простым является задание  $p(\psi)$  и  $F(\psi)$ . Физически же более естественно для стеллараторов задавать давление  $p(\psi)$  и тороидальный ток  $J(\psi)$ , который может быть определен с помощью закона Ома. Стационарному равновесию соответствует  $J(\psi) = 0$ . Задача с заданными  $p(\psi)$  и  $J(\psi)$  сложнее, чем с  $p(\psi)$  и  $F(\psi)$ , так как входящий в правую часть уравнения полоидальный ток  $F(\psi)$  связан с  $J(\psi)$  интегральным соотношением. Поэтому двумерное уравнение равновесия становится интегродифференциальным, см. (3.75), (4.56). Примеры такой постановки задачи содержатся в [69]. При решении задач эволюции равновесия удобно задаваться профилями давления  $p(\psi)$  и вращательного преобразования  $\mu(\psi)$ . Остановимся подробнее на этом случае.

Типичной задачей эволюции является равновесие с замороженными потоками, предложенное первоначально для токамаков Кларком и Сигмаром [136] как средство нахождения решений для токамака с высоким  $\beta$ . Замороженность потоков и, как следствие, неизменность профиля  $\mu$  могут осуществляться при достаточно быстром — за время, меньшее скингового, — нагреве плазмы. При этом не происходит образования сепаратрисы на границе плазмы, что и позволяет получать равновесие с  $\beta$  значительно выше обычного предельного значения  $\beta_{eq} = \mu^2 kb$  [136, 137, 29], получающегося при простой правой части уравнения равновесия, соответствующей плавному профилю тока. Замороженности магнитного поля при быстром нагреве соответствует автоматическое возбуждение в плазме достаточно сильного тока  $J(\psi)$ . Его релаксация к своему стационарному значению приводит к новому стационарному состоянию, если  $\beta < \beta_{eq}$ , либо, если  $\beta > \beta_{eq}$ , к нарушению равновесия — возникает сепаратриса, проникающая внутрь плазмы [138]. Установление нового стационарного равновесия после подъема тока (или распад конфигурации при  $\beta > \beta_{eq}$ ) происходит за время порядка скингового [138, 139].

Для описания эволюции плазмы уравнения равновесия (1.1) достаточно дополнить уравнением Максвелла для электрического поля

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad (2.110)$$

и проекцией обобщенного закона Ома на магнитное поле, имеющей в отсутствие неиндукционных механизмов поддержания тока (бутстрэп-ток, токи увлечения) следующий простой вид:

$$j \mathbf{B} = \sigma_{\parallel} \mathbf{E} \mathbf{B}. \quad (2.111)$$

Эти уравнения при заданном давлении  $p$  и проводимости  $\sigma_{\parallel}$  позволяют описать эволюцию равновесия без привлечения уравнений диффузии и теплопроводности, которые из-за обычной аномально-



сти переносов ненадежны. Такой подход, известный как метод заданного давления, предложенный в [140], использовался для описания как токамаков [138], так и стеллараторов [139, 67] и винтовых пинчей с обращенным шагом силовых линий [112, 141].

Временная эволюция плазмы описывается уравнением, которое получается усреднением (2.111) по объему между двумя близкими магнитными поверхностями [140]:

$$\langle \mathbf{jB} \rangle = -\sigma_{\parallel}(a) \langle \mathbf{B} \partial \mathbf{A} / \partial t \rangle. \quad (2.112)$$

Здесь  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля;  $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ ;  $\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \Phi_E$ ;  $\Phi_E$  — скалярный электрический потенциал, выпадающий при усреднении из (2.112) в силу очевидного тождества  $\langle \mathbf{B} \nabla f \rangle = 0$  для любой периодической по  $\theta$  и  $\zeta$  функции. Используя для  $\mathbf{A}$  представление (2.19), которое соответствует заданию  $\mathbf{B}$  через потоки и периодическую функцию  $\eta$  в виде (2.11), входящее в правую часть (2.112) выражение  $\mathbf{B} \partial \mathbf{A} / \partial t$  можно записать в виде

$$2\pi \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = B^2 \dot{\Phi} + B^2 \dot{\psi} + (B^2 \Phi' + B^2 \psi' + \mathbf{B} \nabla \eta) \frac{\partial a}{\partial t} + \mathbf{B} \nabla \left( \Phi \frac{\partial \theta}{\partial t} + \psi \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \eta \frac{\partial a}{\partial t} \right). \quad (2.113)$$

Здесь  $\dot{\Phi} \equiv \partial \Phi(a, t) / \partial t$ ;  $\Phi' \equiv \partial \Phi(a, t) / \partial a$  и т. д. Третий член в правой части (2.113) равен нулю — коэффициент перед  $\partial a / \partial t$  можно записать как скалярное произведение  $\mathbf{B} \mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u} = \Phi' \nabla \theta + \psi' \nabla \zeta + \nabla \eta$ , а  $\mathbf{B}$  согласно (2.11) представляется в виде  $\mathbf{B} = [\nabla a] / (2\pi)$ . Последний член в (2.113) при усреднении  $\langle \dots \rangle$  исчезает; таким образом, в уравнении эволюции (2.112) остаются производные по времени лишь от магнитных потоков  $\psi$  и  $\Phi$ . Выражая теперь с помощью (2.11)  $B^2$  и  $B^3$  через потоки, а  $\langle \mathbf{jB} \rangle$  в правой части — через токи, получаем окончательно [140]

$$\Phi' \dot{\psi} - \psi' \dot{\Phi} = \frac{1}{\sigma_{\parallel}} (J F' - F J'). \quad (2.114)$$

Для описания эволюции профиля вращательного преобразования  $\mu(a, t)$  это уравнение можно переписать иначе

$$\frac{\partial \mu(a, t)}{\partial t} = \frac{\dot{\Phi}}{\Phi'} \mu' + \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{F^2}{\sigma_{\parallel} \Phi'} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{J}{F} \right) \right] \quad (2.115)$$

или, полагая  $a = \Phi$  ( $\Phi' = 1$ ,  $\dot{\Phi} = 0$ ),

$$\frac{\partial \mu(\Phi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \Phi} \left[ \frac{F^2}{\sigma_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left( \frac{J}{F} \right) \right]. \quad (2.116)$$

Это уравнение должно быть дополнено выражением для  $\mu$ :

$$\mu = -\psi' / \Phi' = -\alpha_{23}^0 / \alpha_{22}^0 + J / \alpha_{22}^0 \Phi', \quad (2.117)$$

которое в общем случае получается из уравнений связи токов с потоками (2.81). Наиболее просто коэффициенты  $\alpha_{ik}^0(a)$  выража-

ются в системе координат с ВСЛ:  $\alpha_{ik}^0 = \langle g_{ik} \sqrt{g} \rangle_{\theta, \zeta}$ . Для случая винтовой и аксиальной симметрий другие способы вычисления  $\alpha_{ik}^0$  обсуждаются в гл. 3.

Уравнение эволюции (2.114) и уравнение баланса давлений Крускала — Кульсруда (1.3) позволяют после исключения из них  $J'$  представить входящую в уравнения равновесия величину  $FF'(\psi)$  в виде

$$FF'(\psi) = -\frac{F^2 \rho'(\psi)}{\langle B^2 \rangle} + \frac{\sigma_{\parallel} F}{\langle B^2 \rangle V'} (\psi' \dot{\Phi} - \Phi' \dot{\psi}), \quad (2.118)$$

где  $\langle B^2 \rangle V' = F\Phi' - J\psi'$ . Тем самым приходим к эволюционной формулировке уравнений равновесия (3.8), (4.34), (4.36).

В стационарном случае  $\dot{\Phi} = 0$ ,  $\dot{\psi} = -\varepsilon_0 = \text{const}$ , где  $\varepsilon_0$  — внешняя ЭДС.

## 2.6. Системы трехмерных уравнений равновесия в различных представлениях

В аналитических исследованиях равновесных конфигураций удобным оказывается одновременное использование контравариантного (потокowego) и ковариантного (токового) представлений магнитного поля  $\mathbf{B}$ . В гл. 4 и 5 подробно описаны способы решения задач равновесия в рамках этого подхода. Процедура решения уравнений, возникающих при приравнивании выражений поля в контра- и ковариантном представлениях, не обладает регулярностью и поэтому затруднительна при численном моделировании равновесия.

Для получения регулярного алгоритма решения задачи равновесия естественно работать в каком-либо одном представлении. При этом получаем различные формулировки уравнений равновесия.

**Токовое и потокое представление.** При использовании потокowego представления (2.33) условия  $\mathbf{B}\nabla a = 0$  и  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  удовлетворяются тождественно, а  $\mathbf{j}\nabla a = 0$  приводит к линейному, при фиксированном  $a(\mathbf{r})$ , уравнению (2.34) для  $\theta$  и  $\zeta$  типа уравнения Лапласа. Собственно уравнение равновесия (2.10) легко преобразовать, учитывая, что

$$[[\nabla a \nabla x] \nabla a] \text{rot } \mathbf{B} = |\nabla a|^2 \nabla x \cdot \text{rot } \mathbf{B} = |\nabla a|^2 \text{div } [\mathbf{B} \nabla x]. \quad (2.119)$$

Полная система уравнений приобретет вид:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\Phi'}{2\pi} [\nabla a \nabla \theta_s] + \frac{\psi'}{2\pi} [\nabla a \nabla \zeta_s]; \\ q \text{div } [\nabla a [\nabla \theta_s \nabla a]] &= \text{div } [\nabla a [\nabla \zeta_s \nabla a]]; \\ \text{div } [\mathbf{B} \nabla \zeta_s] &= q \text{div } [\mathbf{B} \nabla \theta_s] + 2\pi \cdot dp/d\psi, \end{aligned} \right\} \quad (2.120)$$

где  $q \equiv -\Phi'(a)/\psi'(a)$ . Различный выбор координат  $\theta_s$  и  $\zeta_s$  системы с ВСЛ обсуждался в разд. 2.2.

Пользуясь токовым представлением, удобно выбрать  $\theta$  и  $\zeta$  так,

чтобы исключить из него функцию  $\varphi$  [см. (2.23) и (2.72)]. В этом случае уравнения равновесия (1.1) сводятся к системе

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{J}{2\pi} \nabla\theta + \frac{F}{2\pi} \nabla\xi - \frac{\mathbf{v}}{2\pi} \nabla a; \\ J \operatorname{div} \nabla_a \theta &= -F \operatorname{div} \nabla_a \xi; \\ \mathbf{B} \nabla \mathbf{v} &= -2\pi p' - F' \mathbf{B} \nabla \xi - J' \mathbf{B} \nabla \theta, \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

$$\text{где } \mathbf{v} = J \frac{\nabla a \nabla \theta}{|\nabla a|^2} + F \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2}.$$

В (2.121), как и в (2.120), одну из переменных,  $\theta$  или  $\xi$ , можно считать заданной, например, положить  $\xi = 2\pi s/L$ , где  $s$  — длина дуги оси, а  $L$  — ее полная длина. Два других варианта определения  $\theta$  и  $\xi$ , удовлетворяющих (1.121), описаны в разд. 2.2: это координаты Бузера и конатуральные.

Система уравнений (2.120) удобна для решения задач об эволюции равновесия, поскольку она выражена на языке почти сохраняющейся при достаточно быстрых изменениях внешних условий величины  $q(\psi)$ .

Система же (2.121) адекватна для описания установившегося стационарного равновесия, когда ток  $J$  выражается по закону Ома (2.114) через напряжение обхода (или через мощность инжекции в случае токов увлечения). Она обладает определенными преимуществами перед другими системами уравнений в случае  $J=0$ , в частности при учете дивергентных (уходящих из объема плазмы) магнитных поверхностей.

**Тороидальное равновесие, допускающее наличие незамкнутых магнитных поверхностей.** Уравнение равновесия для  $\psi$  в случае осевой или винтовой симметрии задачи позволяет находить решение не только в виде системы винтовых торов, но и с сепаратрисами и в виде многоосевых конфигураций, если только симметрия не нарушается. Введение же потоковых переменных ( $a, \theta, \xi$ ) сразу ограничивает рассмотрение случаем односвязных торов. Нетрудно видеть, что это ограничение связано с теми слагаемыми в представлениях вектора  $\mathbf{B}$  (2.11), (2.23), которые требуют введения полоидального обхода (переменной  $\theta$ ) для определения тороидального магнитного потока  $\Phi$  и электрического тока  $J$ . Так как в стеллараторах нельзя положить  $\Phi=0$ , то представление (2.11) непригодно для описания разомкнутых магнитных поверхностей. Однако для стелларатора с  $J=0$  в представлении (2.23) сохраняется лишь тороидальная переменная  $\xi$  и нет необходимости введения переменной  $\theta$ . Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{F}{2\pi} \left( \nabla \xi - \nabla a \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2} \right); \\ F \mathbf{B} \nabla \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2} &= 4\pi^2 p' - FF' \frac{[\nabla a \nabla \xi]^2}{|\nabla a|^2}; \\ \operatorname{div} \frac{[\nabla a [\nabla \xi \nabla a]]}{|\nabla a|^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.122)$$

Она не связана с выделением замкнутых контуров в полоидальном направлении и, следовательно, пригодна и для описания присепаратрисных областей.

Здесь фигурируют только полоидальные поток и ток, не требующие для своего определения представления о замкнутом полоидальном контуре.

При наличии продольного тока можно воспользоваться смешанным, или полоидальным, представлением [121], когда векторное поле выражается по аналогии со случаем симметрии с помощью опорных векторных полей  $\mathbf{b}_F$  и  $\mathbf{b}_\psi$ :

$$2\pi\mathbf{B} = [\nabla\psi\mathbf{b}_F] + F\mathbf{b}_\psi. \quad (2.123)$$

В случае винтовой симметрии  $\mathbf{b}_F = \mathbf{b}_\psi = (\lambda\mathbf{e}_z + r\mathbf{e}_\varphi)/(\lambda^2 + r^2)$  (см. гл. 3). В общем случае векторы  $\mathbf{b}_F$ ,  $\mathbf{b}_\psi$  нельзя задать извне. Их необходимо согласовывать с магнитными поверхностями равновесной конфигурации.

Для плотности тока  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  получаем из (2.123)

$$2\pi\mathbf{j} = \text{rot } [\nabla\psi\mathbf{b}_F] + F \text{rot } \mathbf{b}_\psi + [\nabla F\mathbf{b}_\psi]. \quad (2.124)$$

Векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  должны удовлетворять уравнениям (2.9) и (2.10):

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \nabla\psi &= 0; & \mathbf{j}\nabla\psi &= 0; \\ \mathbf{j}[\mathbf{B}\nabla\psi] &= |\nabla\psi|^2 p'(\psi). \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Требую независимого выполнения первых трех соотношений (2.125) для полоидальной  $[\nabla\psi\mathbf{b}_F]$  и тороидальной  $F\mathbf{b}_\psi$  составляющих вектора  $2\pi\mathbf{B}$ , получаем уравнения для определения  $\mathbf{b}_F$ ,  $\mathbf{b}_\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{b}_\psi &= 0; & \mathbf{b}_\psi\nabla\psi &= 0; & \nabla a \text{ rot } \mathbf{b}_\psi &= 0; \\ \text{div } |\nabla a|^2 \mathbf{b}_F &= 0; & \mathbf{b}_F\nabla\psi &= 0; & \nabla a \text{ rot } \mathbf{b}_F &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.126)$$

Эту систему векторных уравнений можно свести к двум однотипным скалярным уравнениям. Положим с этой целью

$$\mathbf{b}_\psi = [\nabla a \nabla \lambda]; \quad \mathbf{b}_F = \mathbf{b}_\psi + [\nabla a [\nabla h \nabla a]] / |\nabla a|^2. \quad (2.127)$$

При этом автоматически удовлетворяются три из условий (2.126):  $\mathbf{b}_\psi\nabla a = 0$ ,  $\text{div } \mathbf{b}_\psi = 0$ ,  $\mathbf{b}_F\nabla a = 0$ . Учитывая, что  $[\mathbf{b}_F\nabla a] = [\mathbf{b}_\psi\nabla a] + [\nabla h \nabla a]$ , имеем  $\nabla a \text{ rot } \mathbf{b}_F = \text{div } [\mathbf{b}_F\nabla a] = \nabla a \text{ rot } \mathbf{b}_\psi$ , т. е. третье и шестое условия в (2.126) совпадают. Поэтому осталось необходимым удовлетворить условиям  $\nabla a \text{ rot } \mathbf{b}_\psi = 0$  и  $\text{div } |\nabla a|^2 \mathbf{b}_F = 0$ , которые приводят к следующим уравнениям для функции  $\lambda$  и  $h$ :

$$\left. \begin{aligned} \text{div } [\nabla a [\nabla \lambda \nabla a]] &= 0; \\ \text{div } [\nabla a [\nabla h \nabla a]] &= [\nabla \lambda \nabla a] \nabla |\nabla a|^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Заметим, что выражение для  $\mathbf{b}_F$  можно было бы выбрать в виде

$$\mathbf{b}_F = [\nabla a [\nabla \hat{h} \nabla a]] / |\nabla a|^2.$$

Тогда правая часть уравнения для  $\hat{h}$  обратилась бы в нуль. Добавление в  $\mathbf{b}_F$  слагаемого  $\mathbf{b}_\psi$  позволяет более непринужденно переходить к случаю винтовой симметрии. В этом случае  $h = 0$ ,  $\mathbf{b}_F = \mathbf{b}_\psi$ .

Чтобы  $\psi$  и  $F$  представляли магнитный поток и ток, векторы  $\mathbf{b}_F$ ,  $\mathbf{b}_\psi$  должны быть определенным образом нормированы. Введем векторные элементы длины  $d\mathbf{l}_\psi$ ,  $d\mathbf{l}_F$  в направлении векторов  $\mathbf{b}_\psi$ ,  $\mathbf{b}_F$  и ориентированный элемент площади полоидальной перегородки  $d\mathbf{S}_P$  соотношениями

$$d\mathbf{l}_\psi = \frac{\mathbf{b}_\psi}{b_\psi b_F} d\xi_\psi; \quad d\mathbf{l}_F = \frac{\mathbf{b}_F}{b_\psi b_F} d\xi_F; \quad d\mathbf{S}_P = [d\mathbf{l}_\psi d\mathbf{l}_F]. \quad (2.129)$$

Здесь  $\xi_\psi$ ,  $\xi_F$  — тороидальные циклические переменные, изменяющиеся на единицу при полном обходе тора [аналог  $\varphi/(2\pi)$  осесимметричной системы];  $d\mathbf{l}_1$  — элемент длины в направлении изменения метки  $a$ . При таком определении  $d\mathbf{l}_F$ ,  $d\mathbf{l}_\psi$  имеем в согласии со смыслом  $\psi$  и  $F$ :

$$\int \mathbf{B} d\mathbf{S}_P = -\int d\psi; \quad \oint \mathbf{B} d\mathbf{l}_F = F. \quad (2.130)$$

После подстановки смешанного представления  $\mathbf{B}$  (2.123) в последнее уравнение (2.125) получим уравнение равновесия в виде

$$\frac{d\rho}{d\psi} = \left( \mathbf{b}_F + F \frac{[\mathbf{b}_\psi \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \right) \mathbf{j}. \quad (2.131)$$

Подставляя сюда выражение (2.124) для плотности тока, находим уравнение для полоидального потока  $\psi$ , являющееся обобщением известных уравнений осевой и винтовой симметрий на трехмерный случай:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{b}_F^2 \nabla \psi = & -4\pi^2 \frac{d\rho}{d\psi} - F \frac{dF}{d\psi} \mathbf{b}_\psi^2 + [\mathbf{b}_F \operatorname{rot} \mathbf{b}_F] \nabla \psi - \frac{dF}{d\psi} [\mathbf{b}_F \mathbf{b}_\psi] \nabla \psi + \\ & + F \mathbf{b}_F \operatorname{rot} \mathbf{b}_\psi - F \frac{[\mathbf{b}_\psi \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \operatorname{rot} [\mathbf{b}_F \nabla \psi] + F^2 \frac{[\mathbf{b}_\psi \nabla \psi]}{|\nabla \psi|^2} \operatorname{rot} \mathbf{b}_\psi. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Вместе с уравнениями (2.128) для функций  $\lambda$ ,  $h$ , входящих в выражение для вспомогательных векторов  $\mathbf{b}_F$ ,  $\mathbf{b}_\psi$ , уравнение (2.132) составляет основу для решения трехмерных уравнений равновесия при заданных  $\rho(\psi)$ ,  $F(\psi)$ . Граничными условиями к этой задаче могут быть задание знакопеременных токов во внешних винтовых («стеллараторных») обмотках.

В [121, 134] уравнение (2.132) получено с использованием натуральной и конатуральной метрик. Там показано, что

$$\mathbf{b}_F = \mathbf{e}_{c3}/(e_{N3}e_{c3}); \quad \mathbf{b}_\psi = \mathbf{e}_{N3}/(e_{N3}e_{c3}). \quad (2.133)$$

Чтобы получить эти соотношения, достаточно исключить из потокового представления (2.33) продольный поток  $\Phi$ , выразив его через  $\psi$  и  $F$  с помощью (2.81). Описанный выше вывод с самого начала не предполагает наличия замкнутых магнитных поверхностей.

Вопрос о решении приведенных уравнений трехмерного равновесия еще не ясен. Это касается как случая замкнутых магнитных поверхностей, так и случая многосвязных и разомкнутых по-

верхностей. Строго говоря, сомнительно вообще существование математически точного решения. Для практических целей, однако, достаточно приближенных решений, соответствующих пренебрежению мелкоостровной структурой в конфигурации. На формальном языке это означает, что вместо функции  $p'(\psi)$  в уравнении равновесия следует использовать функцию  $Z(\mathbf{r})$ , близкую к  $p'(\psi)$ , но не совпадающую в точности с ней. Представляется, что такая постановка задачи позволит создать необходимые алгоритмы для решения трехмерных уравнений равновесия.

## Глава 3. КОНФИГУРАЦИИ С ВИНТОВОЙ СИММЕТРИЕЙ

### 3.1. Уравнение равновесия

В этой главе рассмотрены уравнения равновесия плазмы в системах с винтовой симметрией. Это промежуточный шаг от систем с аксиальной симметрией к замкнутым трехмерным конфигурациям стеллараторного типа. С одной стороны, приближение винтовой симметрии — идеализация; это простейшая модель тороидального стелларатора с большим аспектным отношением или стелларатора с пространственной осью. Основное преимущество такой модели — двумерность, а основной недостаток — незамкнутость. С другой стороны, предположение наличия у системы винтовой симметрии позволяет включить в рассмотрение и системы с аксиальной симметрией (вырожденная винтовая), для которых описание в рамках такой модели является точным. Кроме точного описания аксиально-симметричных систем теория винтового равновесия дает возможность исследовать равновесные состояния в таких системах, возникающих при развитии винтовых возмущений [143, 144].

Системы с винтовой симметрией рассматривались в ряде работ [9, 36, 82, 111, 145]. Основой для изучения равновесия таких систем служит скалярное двумерное уравнение [36] для функций полоидального потока  $\psi$ , содержащее в правой части внешний полоидальный ток  $F$  и давление  $p$ . В ряде задач вместо  $F(\psi)$  удобно задавать продольный ток  $J(\psi)$  (например, всюду равный нулю) или профиль вращательного преобразования  $\mu(\psi)$ . Чтобы переформулировать задачу равновесия, необходимо воспользоваться уравнениями связи токов с потоками. Эти уравнения рассмотрены в разд. 3.3. Другая цель настоящей главы (кроме вывода этих уравнений) — получение геометрических соотношений, позволяющих при рассмотрении систем с винтовой симметрией выбирать наиболее удобный способ описания конфигурации.

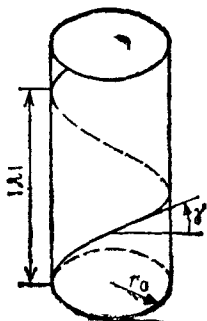


Рис. 27. Винтовая линия на цилиндре:  
 $r_0$  — радиус цилиндра;  $|\lambda|$  — шаг винтовой линии по оси  $z$ ;  
 $\gamma$  — угол наклона винтовой линии,  $\operatorname{tg} \gamma = \lambda / r_0$

Система считается обладающей винтовой симметрией, если описывающие ее физические величины  $f_i$  зависят в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной с осью конфигурации, лишь от двух координат —  $r$  и  $z^* = z - \varphi$ :  $f_i = f_i(r, z^*)$ . Линии  $z^* = \text{const}$  при  $r = \text{const}$ , на которых эти функции постоянны, являются винтовыми линиями с шагом  $\lambda = 2\pi\lambda$ , навитыми на цилиндр радиусом  $r$  (рис. 27). Знак  $\lambda$  определяет направление вращения этой линии: при  $\lambda > 0$  спираль правовинтовая, при  $\lambda < 0$  — левовинтовая. Касательный вектор к этой линии можно представить в виде

$$\mathbf{b} = C(r, z^*) [\nabla r \nabla z^*]. \quad (3.1)$$

По определению  $\mathbf{b} \nabla f_i(r, z^*) = 0$ . Функция  $C(r, z^*)$  в (3.1) может быть выбрана произвольно. Для вычислений удобно задать

$$C = -\lambda r / [L(\lambda^2 + r^2)], \quad (3.2)$$

где  $L$  — полная длина системы вдоль оси  $z$ . При таком выборе  $C$

$$\mathbf{b} = \lambda \frac{r \mathbf{e}_\varphi + \lambda \mathbf{e}_z}{L(\lambda^2 + r^2)}, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{e}_\varphi$  и  $\mathbf{e}_z$  — единичные векторы вдоль  $\nabla \varphi$  и  $\nabla z$ ,

$$\text{rot } \mathbf{b} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + r^2} \mathbf{b}; \quad \mathbf{b}^2 = \frac{1}{L^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + r^2}. \quad (3.4)$$

По существу  $\mathbf{b}(r, z^*)$  — бесшировое бессилковое поле, так как, кроме (3.4), выполняется и  $\text{div } \mathbf{b} = 0$ . Аксиальной симметрии в (3.1) — (3.4) соответствует  $\lambda = 0$  при  $L/\lambda = 2\pi$ .

Вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{B}$ , не имеющий составляющей по  $\nabla a$  (как и прежде,  $a$  — «метка» магнитной поверхности), можно представить в виде разложения по ортогональным векторам  $\mathbf{b}$  и  $[\nabla a \mathbf{b}]$

$$\mathbf{B} = A(r, z^*) [\nabla a \mathbf{b}] + F(r, z^*) \mathbf{b}. \quad (3.5)$$

Уравнения  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и  $\nabla a \text{ rot } \mathbf{B} = 0$  накладывают определенные ограничения на функции  $A$  и  $F$ . Из  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  следует  $[\nabla a \mathbf{b}] \nabla A = 0$ . Вместе с условием  $\mathbf{b} \nabla A = 0$  (из-за выбора  $\mathbf{b}$ ) это означает, что  $A$  — поверхностная функция:  $A = A(a)$ . Второе условие,  $\nabla a \text{ rot } \mathbf{B} = \text{div } [\mathbf{B} \nabla a] = 0$ , приводит к  $[\nabla a \mathbf{b}] \nabla F = 0$ . Таким образом,  $F = F(a)$ . Обозначая  $A(a) \equiv \psi'(a)$ , получаем

$$\mathbf{B} = [\nabla \psi \mathbf{b}] + F(\psi) \mathbf{b}; \quad (3.6)$$

$$\mathbf{j} = [\nabla F \mathbf{b}] + \left( \frac{2\lambda}{\lambda^2 + r^2} F - \frac{\text{div } \mathbf{b}^2 \nabla \psi}{\mathbf{b}^2} \right) \mathbf{b}. \quad (3.7)$$

Проще всего проверить формулу (3.7), вычисляя проекции вектора  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  на  $\mathbf{b}$  и  $[\nabla a \mathbf{b}]$  и используя получаемое прямым вычислением в координатах  $r, \varphi, z$  равенство  $[\nabla a \mathbf{b}] \text{ rot } [\nabla a \mathbf{b}] = 0$ . Уравнение

равновесия  $\nabla p = [jB]$  с учетом (3.6) и (3.7) приводится к виду

$$\operatorname{div} \frac{\nabla \psi}{\lambda^2 + r^2} = \frac{2\lambda F}{(\lambda^2 + r^2)^2} - \frac{FF'(\psi)}{\lambda^2 + r^2} - 4\pi^2 N^2 p'(\psi), \quad (3.8)$$

где  $|N| = L/|\lambda|$  — полное число периодов системы (исчезающее из уравнения при замене  $\psi$  и  $F$  на  $\psi/N$  и  $F/N$  — величины, рассчитанные на период). Это скалярное двумерное уравнение равновесия конфигураций с винтовой симметрией было впервые получено в слегка отличном от (3.8) виде в [36]. Как частный случай, соответствующий  $\lambda = 0$  и  $N = 1$ , в (3.8) содержится уравнение Грэда — Шафранова

$$\operatorname{div}(\nabla \psi / r^2) = -FF'(\psi) / r^2 - 4\pi^2 p'(\psi). \quad (3.9)$$

Формально введенные в (3.6) величины  $\psi$  и  $F$  можно связать с полоидальными потоками  $\chi(a)$  и током  $I(a)$  через поверхность  $z^* = \text{const}$ , ограниченную с одной стороны линией ее пересечения с магнитной поверхностью  $a = \text{const}$ , а с другой — магнитной осью. Ориентированный элемент такой поверхности равен (см., например, [108, с. 232])

$$dS_a = \pm [dl_1 dl_2] = \pm [e_1 e_2] dx^1 dx^2 = \pm r \nabla z^* dr d\varphi. \quad (3.10)$$

Здесь  $x^i = (r, \varphi, z^*)$ ,  $\sqrt{g} = r$ ; верхний знак соответствует случаю, когда магнитная ось находится на цилиндре большего, а нижний — меньшего радиуса, чем у цилиндра, на который навит второй край полоски;  $z^* = \text{const}$ . Магнитный поток и ток через эту спиральную поверхность определяются интегралами

$$\chi(a) = \int B dS_a; \quad I(a) = \int j dS_a. \quad (3.11)$$

Используя (3.6) и (3.7), находим

$$\mathbf{B} \nabla z^* = \frac{\lambda}{Lr} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \mathbf{j} \nabla z^* = \frac{\lambda}{Lr} \frac{\partial F}{\partial r} \quad (3.12)$$

и, проводя интегрирование в (3.11), получаем (с учетом равенства  $2\pi N \lambda / L = 1$ ),

$$\chi(a) = \psi_0 - \psi(a); \quad I(a) = F_0 - F(a). \quad (3.13)$$

Таким образом,  $\psi(a)$  и  $F(a)$  — внешние дополнительные к  $\chi(a)$  и  $I(a)$  полоидальные поток и ток соответственно.

Уравнение (3.8) позволяет описывать любые равновесные конфигурации, обладающие винтовой симметрией: с прямой или с винтовой осью, односвязные (с одной магнитной осью) и многосвязные, как с вложенными, так и с разомкнутыми магнитными поверхностями. При описании одноосевых конфигураций с винтовой магнитной осью бывает удобно работать не в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , связанной с прямой осью (ось  $z$ ), а в квазицилиндрической  $\rho, \theta_n, s$ , связанной с винтовой геометрической осью системы. В следующем разделе рассмотрены основные гео-



метрические соотношения, позволяющие перейти от цилиндрической системы координат  $r, \varphi, z$  к квазицилиндрической  $\rho, \theta_n, s$  и обратно.

### 3.2. Основные геометрические соотношения

Винтовая ось  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s)$ , навитая на цилиндр радиусом  $r_0$  с шагом  $|\lambda|$  (см. рис. 27), может быть задана в параметрическом виде уравнениями:

$$r = r_0; \quad \varphi = \Omega t; \quad z = Vt. \quad (3.14)$$

Здесь можно положить  $V > 0$ , тогда правовинтовой спирали будет соответствовать  $\Omega > 0$ , а левовинтовой —  $\Omega < 0$ . Элемент длины кривой (3.14) дается выражением

$$ds = \sqrt{r_0^2 d\varphi^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \frac{r_0^2}{\lambda^2}} dz = \sqrt{r_0^2 + \lambda^2} \frac{\lambda}{|\lambda|} d\varphi, \quad (3.15)$$

где  $\lambda = V/\Omega$ . Определив величину  $R_h$  соотношением

$$R_h \equiv \sqrt{r_0^2 + \lambda^2} = L_h/(2\pi |N|), \quad (3.16)$$

где  $L_h$  — полная длина винтовой оси,  $N = L/\lambda$ ,  $|N|$  — число ее периодов, перепишем уравнения (3.14) с учетом (3.15) в виде

$$r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0(s) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{s}{R_h}, \quad z = z_0(s) = \frac{|\lambda|}{R_h} s. \quad (3.17)$$

Здесь параметром является длина рассматриваемой винтовой линии, отсчитываемая от точки ее пересечения с плоскостью  $z=0$  в направлении возрастания  $z$ . Радиус-вектор точки, лежащей на этой линии, задается уравнением (так называемая «естественная параметризация»)

$$\mathbf{r}_0(s) = r_0 \mathbf{e}_r + z_0 \mathbf{e}_z = r_0 \mathbf{e}_r + (|\lambda|/R_h) s \mathbf{e}_z. \quad (3.18)$$

Угол, на который повернут вектор  $\mathbf{e}_r^0$  относительно направления  $\varphi=0$ , равен  $(\lambda/|\lambda|) s/R_h$ . Ориентация векторов  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\varphi$  зависит от положения рассматриваемой точки пространства, поэтому, чтобы выделить векторы  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi$ , соответствующие точке  $s$  на винтовой линии  $\mathbf{r}_0(s)$  (3.18), они снабжены индексом 0.

Дифференцируя (3.18) по  $s$ , получаем, согласно общим правилам дифференциальной геометрии, уравнение единичного вектора  $\boldsymbol{\tau}$ , касательного к кривой (3.14):

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}_0}{ds} = \frac{\lambda}{R_h} \mathbf{e}_z + \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{R_h} \mathbf{e}_\varphi^0. \quad (3.19)$$

Дифференцирование  $\mathbf{e}_r^0$  осуществляется следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{e}_r^0}{ds} = \frac{d\mathbf{e}_r^0}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = \mathbf{e}_\varphi^0 \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\mathbf{e}_\varphi^0}{R_h} \frac{\lambda}{|\lambda|}. \quad (3.20)$$

Аналогично получаем

$$d\mathbf{e}_{\Phi}^0/ds = -(\mathbf{e}_r^0/R_h) \lambda / |\lambda|, \quad (3.21)$$

что позволяет определить

$$d\tau/ds = -\mathbf{e}_r^0 r_0 / R_h^2. \quad (3.22)$$

Пространственные кривые  $\mathbf{r}(s)$  с точностью до положения в пространстве определяются формулами Серре — Френе:

$$d\tau/ds = k\mathbf{n}; \quad d\mathbf{n}/ds = -k\tau + \kappa\beta; \quad d\beta/ds = -\kappa\mathbf{n}, \quad (3.23)$$

где  $\tau = d\mathbf{r}/ds$  — единичный вектор касательной к кривой  $\mathbf{r}(s)$ ;  $\mathbf{n}$  — главная нормаль;  $\beta$  — бинормаль;  $k$  и  $\kappa$  — кривизна и кручение соответственно. Для винтовой линии (3.14) согласно (3.22) и (3.19)

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r^0, \quad \beta = [\tau\mathbf{n}] = \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{R_h} \mathbf{e}_z - \frac{|\lambda|}{R_h} \mathbf{e}_{\Phi}^0. \quad (3.24)$$

С учетом (3.21) находим

$$d\beta/ds = \mathbf{e}_r^0 \lambda / R_h^2. \quad (3.25)$$

Сравнивая (3.22) и (3.25) с первой и третьей формулами (3.23) (второе уравнение (3.23) удовлетворяется тождественно в силу  $\beta = [\tau\mathbf{n}]$ ), определяем связь кривизны  $k$  и кручения  $\kappa$  винтовой оси с параметрами  $r_0$  и  $\lambda$ :

$$k = r_0/R_h^2; \quad \kappa = \lambda/R_h^2. \quad (3.26)$$

Переходя к квазицилиндрическим координатам, рассмотрим вначале общий случай, когда осью системы координат является произвольная пространственная кривая  $\mathbf{r}_0(s)$ . Получив основные геометрические связи, положим в них затем  $k = \text{const}$  и  $\kappa = \text{const}$  в соответствии с (3.26) и тем самым перейдем к системам с осью в виде винтовой линии.

Квазицилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$  вводятся следующим образом. На кривой  $\mathbf{r}_0$  фиксируется точка  $s=0$  и задается направление возрастания  $s$ . На векторы нормали  $\mathbf{n}$  и бинормали  $\beta$ , проведенные из точки  $s$ , натягивается плоскость, в этой плоскости вводятся обычные цилиндрические координаты  $\rho$ ,  $\theta_n$ , угол  $\theta_n$  отсчитывается от нормали  $\mathbf{n}$  (рис. 28). В этих координатах выражение для радиус-вектора произвольной точки пространства записывается в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + \rho \mathbf{e}_{\rho}. \quad (3.27)$$

По определению

$$\mathbf{e}_{\rho} = \mathbf{n}(s) \cos \theta_n + \beta(s) \sin \theta_n. \quad (3.28)$$

Используя формулы Серре — Френе (3.23), получаем выражение для квадрата элемента длины в координатах  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$

$$dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta_n^2 + 2\kappa\rho^2 d\theta_n ds + (h_s^2 + \kappa^2 \rho^2) ds^2, \quad (3.29)$$

где  $h_s = 1 - k\rho \cos \theta_n$ ;  $k(s)$  и  $\kappa(s)$  — кривизна и кручение пространственной оси. Согласно общим правилам дифференциальной геометрии, см., например [9, 108],  $dr^2 = g_{ih} dx^i dx^h$ , где  $g_{ih} = e_i e_h$  ( $i, h = 1, 2, 3$ ) — метрический тензор криволинейной системы координат  $x^i = (\rho, \theta_n, s)$ . Выражение (3.29) позволяет выписать метрический тензор  $g_{ih}$  координат  $x^i = (\rho, \theta_n, s)$  и обратный ему тензор  $g^{ih} = \nabla x^i \nabla x^h$

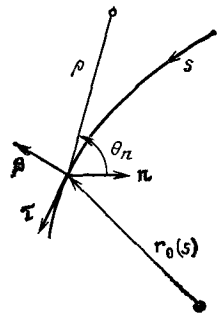


Рис. 28. Квазицилиндрическая система координат, связанная с пространственной осью

$$(g_{ih}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & \kappa\rho^2 \\ 0 & \kappa\rho^2 & h_s^2 + \kappa^2\rho^2 \end{pmatrix};$$

$$(g^{ik}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_s^2 + \kappa^2\rho^2}{\rho^2 h_s^2} & -\frac{\kappa}{h_s^2} \\ 0 & -\frac{\kappa}{h_s^2} & \frac{1}{h_s^2} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Выразим с помощью этих соотношений единичный вектор  $e_{\theta_n} = \nabla\theta_n / |\nabla\theta_n|$  через орты  $\tau, n, \beta$ . Используя определения  $g^{2i} = \nabla\theta_n \nabla x^i$ ,  $|\nabla x^k| = \sqrt{g^{kk}}$ , находим  $e_{\theta_n} e_\rho = 0$ ,  $e_{\theta_n} e_s = -\kappa\rho / \sqrt{h_s^2 + \kappa^2\rho^2}$ , а условие  $e_{\theta_n}^2 = 1$  позволяет вычислить  $e_{\theta_n} [e_s e_\rho] = h_s / \sqrt{h_s^2 + \kappa^2\rho^2}$ . Таким образом,

$$e_{\theta_n} = \frac{1}{\sqrt{h_s^2 + \kappa^2\rho^2}} \{h_s (\beta \cos \theta_n - n \sin \theta_n) - \kappa\rho\tau\}. \quad (3.31)$$

Здесь мы воспользовались очевидным соотношением

$$e_s = \tau, \quad (3.32)$$

которое с учетом связи  $dr_0 = ds \nabla s / |\nabla s|$  получается из определения  $\tau = dr_0 / ds$ .

В дальнейшем нам понадобится вектор  $e_\omega = \nabla\omega / |\nabla\omega|$ , где

$$\omega = \theta_n + \alpha(s); \quad \alpha(s) = \int_0^s \kappa(s') ds'. \quad (3.33)$$

Вводя вместо  $\theta_n$  новый угол  $\omega$ , получаем ортогональные координаты Мерсье  $\rho, \omega, s$  [9], в которых

$$dr^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2 + h_s^2 ds^2. \quad (3.34)$$

Нетрудно убедиться с помощью (3.31) и (3.32), что вектор  $e_\omega = \rho \sqrt{g^{22}} e_{\theta_n} + \kappa\rho \sqrt{g^{33}} e_s$  (ошибочно обозначаемый на с. 26, 27 ра-

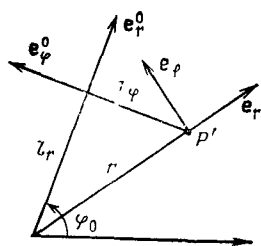


Рис. 29. Проекция сечения  $s=\text{const}$  на плоскость  $z=\text{const}$

боты [9] как  $e_\theta$ ) определяется уравнением

$$e_\omega = -n \sin \theta_n + \beta \cos \theta_n = \partial e_\rho / \partial \theta_n. \quad (3.35)$$

Переходя теперь к рассмотрению систем с винтовой геометрической осью с постоянными кривизной и кручением (3.26), определим связь координат  $\rho, \theta_n, s$  с  $r, \varphi, z$ . С учетом (3.18), (3.28) выражение для радиус-вектора (3.27) произвольной точки  $P$  пространства может быть записано так

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + \rho \mathbf{e}_\rho = l_r \mathbf{e}_r^0 - l_\varphi \mathbf{e}_\varphi^0 + l_z \mathbf{e}_z, \quad (3.36)$$

где

$$l_r = r_0 - \rho \cos \theta_n; \quad l_\varphi = \rho \sin \theta_n \frac{|\lambda|}{Rh}; \quad l_z = z_0(s) + \rho \sin \theta_n \frac{r_0 \lambda}{R_h |\lambda|}. \quad (3.37)$$

На рис. 29 показана проекция этого вектора на плоскость  $z=\text{const}$ . На этой плоскости полярные координаты точки  $P'$ -проекции  $P$  равны

$$r = \sqrt{l_r^2 + l_\varphi^2}, \quad \varphi = \varphi_0(s) - \text{arctg}(l_\varphi/l_r). \quad (3.38)$$

Дополняя эти формулы очевидным соотношением

$$z = l_z, \quad (3.39)$$

получаем полный набор уравнений связи цилиндрических координат  $r, \varphi, z$  произвольной точки  $P$  пространства с квазицилиндрическими координатами  $\rho, \theta_n, s$ .

Первое уравнение (3.38) позволяет выразить входящую в уравнение равновесия (3.8) комбинацию  $r^2 + \lambda^2$  в переменных  $\rho, \theta_n$ :

$$r^2 + \lambda^2 = R_h^2 (h_s^2 + \kappa^2 \rho^2). \quad (3.40)$$

С учетом (3.40) уравнение равновесия конфигураций с винтовой симметрией (3.8) приводится к виду [9, 25]

$$\text{div} \frac{\nabla \psi}{h_s^2 + \kappa^2 \rho^2} = \frac{2\kappa F}{(h_s^2 + \kappa^2 \rho^2)^2} - \frac{FF'(\psi)}{h_s^2 + \kappa^2 \rho^2} - L_h^2 \rho'(\psi). \quad (3.41)$$

Напомним, что здесь  $L_h = 2\pi |N| R_h$  — полная длина винтовой геометрической оси (3.14). При переходе к квазицилиндрическим координатам  $\rho, \theta_n, s$  следует преобразовать также аргументы  $r$  и  $z^*$  функции  $\psi$ . Согласно (3.38), (3.37) и (3.17)  $r = r(\rho, \theta_n)$ ,  $z^* = l_z - \lambda \varphi_0 + \lambda \text{arctg}(l_\varphi/l_r) = z^*(\rho, \theta_n)$ , так что в (3.14)  $\psi = \psi(\rho, \theta_n)$ . Таким образом, условие винтовой симметрии формулируется в квазицилиндрических координатах, связанных с винтовой осью, как

независимость физических величин от продольной координаты  $s$ .

Для того чтобы завершить переход к координатам  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$ , остается выразить через их базисные векторы входящий в (3.6) и (3.7) вектор  $\mathbf{b}$  (3.3). Связь  $\mathbf{e}_\rho$ ,  $\mathbf{e}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_s$  с  $\mathbf{e}_r^0$ ,  $\mathbf{e}_\varphi^0$ ,  $\mathbf{e}_z$  выше уже получена — формулы (3.28), (3.31), (3.32) и (3.19), (3.24). Недостающую связь  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  с  $\mathbf{e}_r^0$ ,  $\mathbf{e}_\varphi^0$  получаем, используя рис. 29:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_r^0 &= (\mathbf{e}_r l_r + \mathbf{e}_\varphi l_\varphi)/r; \\ \mathbf{e}_\varphi^0 &= (-\mathbf{e}_r l_\varphi + \mathbf{e}_\varphi l_r)/r. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

Связь  $r$  с  $\rho$ ,  $\theta_n$  дается первой формулой (3.38). Теперь можно записать уравнения связи ортов естественного трехгранника  $\tau$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\beta$  с ортами цилиндрической системы координат:

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{\lambda}{R_h} \mathbf{e}_z + \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{r R_h} (-\mathbf{e}_r l_\varphi + \mathbf{e}_\varphi l_r); \\ \mathbf{n} &= -(\mathbf{e}_r l_r + \mathbf{e}_\varphi l_\varphi)/r; \\ \beta &= \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{R_h} \mathbf{e}_z + \frac{|\lambda|}{r R_h} (\mathbf{e}_r l_\varphi - \mathbf{e}_\varphi l_r). \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

С помощью этих соотношений получаем окончательно

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_s \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

где  $A$  — ортогональная матрица  $3 \times 3$ :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left( \frac{\lambda^2}{R_h^2} \rho - r_0 h_s \cos \theta_n \right), & -\frac{|\lambda|}{R_h r} r_0 \sin \theta_n, & \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{R_h} \sin \theta_n; \\ \frac{r_0}{r} h_s \sin \theta_n, & \frac{|\lambda|}{R_h r} (\rho - r_0 \cos \theta_n), & \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{R_h} \cos \theta_n; \\ -\frac{\lambda r_0}{R_h^2} \frac{\rho \sin \theta_n}{r}, & \frac{\lambda}{|\lambda|} \frac{r_0}{R_h} \frac{r_0 - \rho \cos \theta_n}{r}, & \frac{|\lambda|}{R_h}. \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Отметим, что  $\det A = 1$ ; при  $r_0 = 0$   $A$  становится единичной матрицей. Теперь нетрудно показать, что

$$h_s \mathbf{e}_s + \kappa \rho \mathbf{e}_\theta = \frac{|\lambda|}{|\lambda|} \frac{1}{R_h} (r \mathbf{e}_\varphi + \lambda \mathbf{e}_z) \quad (3.46)$$

и соответственно вектор  $\mathbf{b}$  (3.3) преобразуется к виду

$$\mathbf{b} = \frac{1}{L_h} \frac{h_s \mathbf{e}_s + \kappa \rho \mathbf{e}_\omega}{h_s^2 + \kappa^2 \rho^2}, \quad (3.47)$$

где  $L_h = 2\pi |N| R_h$ . Подставив (3.47) в инвариантные выражения (3.6), (3.7), получим представления поля  $\mathbf{B}$  и плотности тока  $\mathbf{j}$  в квазицилиндрических координатах Мерсье  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $s$ , или, с учетом (3.33) — в координатах  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$ .

Выше получены представления полей и токов в двух равноценных системах координат — цилиндрической  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и квазицилиндрической  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$ . Выведенные уравнения связи координат  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  и  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$  и соответствующих базисных векторов позволяют без труда устанавливать соответствие выражений, полученных в этих системах координат.

Цилиндрические координаты  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$  удобны для расчета прямых систем (т. е. в пренебрежении кривизной системы) — стеллараторов и винтовых пинчей [146]. Для описания систем с осью в виде винтовой линии более удобна квазицилиндрическая система координат  $\rho$ ,  $\theta_n$ ,  $s$ .

### 3.3. Уравнения связи токов с потоками

В гл. 2 получены уравнения связи токов с потоками для конфигураций произвольной геометрии с вложенными магнитными поверхностями. При выводе этих уравнений использовались два представления поля  $\mathbf{B}$  — токовое и потоковое, а коэффициенты связи  $\alpha_{im}^0$  выражались через базисные векторы двух специальных потоковых систем координат или через метрические коэффициенты  $g_{im}/\sqrt{g}$  произвольной потоковой системы координат. Теперь приведем независимый вывод уравнений связи токов с потоками для конфигураций с винтовой симметрией и получим, используя лишь смешанное (через ток  $F$  и поток  $\psi$ ) представление  $\mathbf{B}$  (3.6), выражения для коэффициентов  $\alpha_{im}^0$ , отличающиеся от приведенных в гл. 2. Подчеркивая важность винтовой симметрии, будем обозначать эти коэффициенты  $\alpha_{im}^h$ .

Вычисляя продольные потоки  $\Phi$  и ток  $J$

$$\Phi(a) = \frac{1}{L} \int_V B \nabla z d\tau; \quad J(a) = \frac{1}{L} \int_V \mathbf{j} \nabla z d\tau, \quad (3.48)$$

где интегрирование производится по объему  $V(a)$ , заключенному внутри магнитной поверхности, получаем с учетом (3.6) и (3.7):

$$\Phi'(a) = \frac{V'(a)}{L} \left\{ \psi' \langle [\nabla a \mathbf{b}] \nabla z \rangle + \frac{F}{L} \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + r^2} \right\rangle \right\}; \quad (3.49)$$

$$J = \frac{V'(a)}{L} \left\{ F \langle [\nabla a \mathbf{b}] \nabla z \rangle - \frac{\psi'}{L} \left\langle \frac{|\nabla a|^2 \lambda^2}{\lambda^2 + r^2} \right\rangle \right\}, \quad (3.50)$$

угловые скобки означают усреднение по слою между близкими магнитными поверхностями

$$\langle f \rangle = \frac{1}{dV} \int_V f d\tau = \frac{d}{dV} \int_V f d\tau.$$

Формула (3.49) получается непосредственным интегрированием скалярного произведения  $\mathbf{B}\nabla z$  с  $\mathbf{B}$  в виде (3.6). Формула (3.50) получается следующим образом. Умножая уравнение  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  на  $\nabla z$ , получаем  $\mathbf{j}\Delta z = \text{div}[\mathbf{B}\nabla z]$ . Таким образом,

$$dJ = \frac{dV}{L} \langle \text{div}[\mathbf{B}\nabla z] \rangle. \quad (3.51)$$

Для любого вектора  $\mathbf{q}$ , компоненты которого не являются многозначными функциями,

$$\langle \text{div } \mathbf{q} \rangle = \frac{d}{dV} \left[ \frac{dV}{da} \langle \mathbf{q}\nabla a \rangle \right], \quad (3.52)$$

поэтому (3.51) после интегрирования по  $V$  с условием  $J(V=0) = 0$  дает

$$J = \frac{1}{L} \frac{dV}{da} \langle [\mathbf{B}\nabla z] \nabla a \rangle. \quad (3.53)$$

Подставляя сюда  $\mathbf{B}$  в виде (3.6), получаем (3.50). Чтобы вычислить  $\langle [\nabla ab] \nabla z \rangle$ , воспользуемся формулой (3.52), где положим  $\mathbf{q} = [\mathbf{b}\nabla z]$ . Интегрируя по  $V$ , получаем

$$\langle [\nabla ab] \nabla z \rangle = \frac{1}{V'} \int_V \nabla z \text{rot } \mathbf{b} d\tau \quad (3.54)$$

и окончательно с учетом (3.4)

$$\langle [\nabla ab] \nabla z \rangle = \frac{1}{V'} \frac{2\lambda^3}{L} \int \frac{d\tau}{(\lambda^2 + r^2)^2}. \quad (3.55)$$

Теперь формулы (3.49) и (3.50) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} J &= -\alpha_{22}^h \psi' + \alpha_{23}^h \Phi'; \\ F &= -\alpha_{23}^h \psi' + \alpha_{33}^h \Phi', \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{33}^h &= L^2 \left[ \frac{dV}{da} \left\langle \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + r^2} \right\rangle \right]^{-1}; & \alpha_{23}^h &= \alpha_{33}^h \frac{2\lambda^3}{L^2} \int \frac{d\tau}{(\lambda^2 + r^2)^2}; \\ \alpha_{22}^h &= \frac{V'}{L^2} \left\langle \frac{|\nabla a|^2 \lambda^2}{\lambda^2 + r^2} \right\rangle + \frac{(\alpha_{23}^h)^2}{\alpha_{33}^h}. \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

Выражения (3.57) для  $\alpha_{lm}^h$  впервые были приведены (без вывода) в [147]. При выводе (3.57) мы следовали [129], где рассмотрен более общий случай анизотропного давления. В (3.57) со-

держатся как частный случай коэффициенты связи (3.56) токов с потоками для токамака [16, 140, 148]

$$\alpha_{22}^T(a) = \frac{V'(a)}{4\pi^2} \left\langle \frac{|\Delta a|^2}{r^2} \right\rangle; \quad \alpha_{33}^T(a) = \frac{4\pi^2}{V'(a)} \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle^{-1}; \quad \alpha_{23}^T = 0, \quad (3.58)$$

которые получаются в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  при  $L^2/\lambda^2 = 4\pi^2$ .

Все приведенные выше соотношения для систем с винтовой симметрией пригодны для конфигураций с прямой и с винтовой осью. При переходе к квазицилиндрическим координатам, связанным с винтовой осью, формулы (3.57) преобразуются к виду

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{33}^h &= L_h^2 \left[ \frac{dV}{da} \left\langle \frac{1}{h_s^2 + \kappa^2 \rho^2} \right\rangle \right]^{-1}; \\ \alpha_{23}^h &= \frac{2\kappa}{L_h^2} \alpha_{33}^h \int_V \frac{d\tau}{(h_s^2 + \kappa^2 \rho^2)^2}; \\ \alpha_{22}^h &= \frac{V'(a)}{L_h^2} \left\langle \frac{|\nabla a|^2}{h_s^2 + \kappa^2 \rho^2} \right\rangle + \frac{(\alpha_{23}^h)^2}{\alpha_{33}^h}. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Преобразование осуществляется с помощью (3.40).

В заключение приведем формулы для геометрических коэффициентов  $\alpha_{lm}^h$  (3.57) системы с прямой осью, обладающей винтовой симметрией, магнитные поверхности которой — несмещенные эллипсы, описываемые уравнением

$$a^2 = r^2(1 + \varepsilon \cos 2\alpha); \quad \alpha = z^*/\lambda = z/\lambda - \varphi. \quad (3.60)$$

Усреднение  $\langle \dots \rangle$  в (3.57) сводится в этом случае к интегрированию по углу  $\alpha$ :

$$\langle f \rangle = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a, \alpha) d\alpha}{1 + \varepsilon \cos 2\alpha}.$$

С помощью этой формулы получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{33}^h &= \frac{L}{2\pi a} \sqrt{\left(1 + \frac{a^2}{\lambda^2}\right)^2 - \varepsilon^2}; \\ \alpha_{22}^h &= \frac{2\pi a}{L} \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}; \quad \alpha_{23}^h = \frac{a}{\lambda}, \quad V'(a) = \frac{2\pi a L}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Эти выражения будут использованы при описании эффекта трансляционного преобразования в гл. 5.

#### 3.4. Другие формулировки уравнения равновесия

Уравнение равновесия (3.41) может быть записано в потоковых координатах как уравнение для функции  $\rho(a, \theta)$ , которая вместе с  $\theta_n = u(a, \theta)$  определяет связь квазицилиндрических координат  $\rho$ ,



$\theta_n$  с потоковыми  $a, \theta$ . При работе с потоковыми координатами  $x^i = (a, \theta, \xi)$  приходится использовать метрические коэффициенты  $\alpha_{ik} \equiv g_{ik}/\sqrt{g}$  и  $\sqrt{g}$ . Их общие представления через функции  $\rho(a, \theta)$  и  $u(a, \theta)$  получаются при переходе в (3.29) от  $\rho, u, s$  к  $a, \theta, \xi$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{12} &= \frac{\rho' \dot{\rho} + \rho^2 u' \dot{u}}{\rho D R_h h_s}; & \alpha_{22} &= \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{u}^2}{\rho D R_h h_s}; \\ \alpha_{23} &= \frac{R_h}{\rho D h_s} (h_s^2 + \kappa^2 \rho^2); & \sqrt{g} &= R_h h_s \rho D; \\ \alpha_{13} &= \kappa \rho u' / (h_s D); & \alpha_{23} &= \kappa \rho \dot{u} / (h_s D). \end{aligned} \right\} \quad (3.62)$$

Здесь  $R_h \equiv L_h / (2\pi)$ , так что  $\xi = s / R_h$ ;  $f' = \partial f / \partial a$ ;  $\dot{f} = \partial f / \partial \theta$ . Отметим, что  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{22}$ , как и  $\alpha_{12}^{\xi}$  и  $\alpha_{22}^{\xi}$  (4.29), полученные усреднением по  $\xi$  для обычного стелларатора, имеют «токамачный» вид. Случаю аксиальной симметрии (токамак) соответствует  $\kappa = 0$ .

Выражения (3.62) позволяют выразить входящую в уравнение равновесия (3.41) комбинацию  $h_s^2 + \kappa^2 \rho^2$  в потоковых переменных:

$$h_s^2 + \kappa^2 \rho^2 = \alpha_{33} \sqrt{g} / R_h^2. \quad (3.63)$$

Этого достаточно для преобразования правой части уравнения равновесия. Левую часть преобразуем, используя общие свойства криволинейных координат (см., например, [108, с. 229]):

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\nabla \psi}{h_s^2 + \kappa^2 \rho^2} &= R_h^2 \operatorname{div} \frac{\nabla \psi}{\sqrt{g} \alpha_{33}} = \frac{R_h^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \frac{(\nabla \psi)^i}{\alpha_{33}} \right] = \\ &= \frac{R_h^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial a} \left[ \psi' \left( \alpha_{22} - \frac{\alpha_{23}^2}{\alpha_{33}} \right) \right] - \psi' \frac{R_h^2}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \alpha_{12} - \frac{\alpha_{13} \alpha_{23}}{\alpha_{33}} \right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

В теории токамаков и обычных стеллараторов часто используется приближение большого аспектного отношения. Для стеллараторов с винтовой осью аналогичным приближением является  $k\rho \ll 1$  и  $\kappa\rho \ll 1$ . Малость величины  $\kappa\rho$  по сравнению с  $h_s$  позволяет пренебречь в уравнении равновесия всеми членами, квадратичными по  $\kappa\rho$ . При этом исчезает не только явно входящая в  $h_s^2 + \kappa^2 \rho^2$  величина  $\kappa^2 \rho^2$ , но и члены, пропорциональные  $\alpha_{23}^2$  и  $\alpha_{13} \alpha_{23}$ , в правой части (3.64), имеющие, как нетрудно убедиться с помощью (3.62), тот же порядок малости. Уравнение равновесия в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial a} (\psi' \alpha_{22}) - \psi' \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha_{12} = \frac{2\kappa R_h^2 F}{\sqrt{g} \alpha_{33}^2} - \frac{FF'(\psi)}{\alpha_{33}} - 4\pi^2 \sqrt{g} \rho'(\psi). \quad (3.65)$$

От уравнения, описывающего аксиально-симметричные системы (при любых  $k\rho$ ), оно отличается лишь первым членом в правой ча-

сти. Если, кроме  $\kappa r \ll 1$ , положить  $k=0$  (прямая ось), то (3.65) сводится к

$$\frac{\partial}{\partial a} (\psi' \alpha_{22}) - \psi' \frac{\partial}{\partial \theta} \alpha_{12} = \frac{\rho D}{R_h} (2\kappa F - j_0(\psi)), \quad (3.66)$$

где

$$j_0(\psi) \equiv 4\pi^2 R_h^2 p'(\psi) + FF'(\psi). \quad (3.67)$$

При дополнительных условиях  $\beta \ll 1$  и  $B_z \gg B_\phi$  в (3.66) можно заменить  $F$  на его вакуумное значение  $F_0$ . Получается упрощенное уравнение

$$\Delta\psi = j_B - j_0(\psi), \quad (3.68)$$

где  $j_B = 2\kappa F_0$ , которое используется при описании винтовых равновесий в токамаке и, в частности, при исследовании устойчивости тиринг-мод [108, 143—145].

Рассмотрим другой путь преобразования уравнения равновесия. Попытаемся (как это сделано в разд. 4.4 для обычного стелларатора) явно выделить в его правой части продольный ток. Функцию  $F'(\psi)$  исключаем, выражая ее через  $p$  и  $J$  из уравнения Крускала — Кульсруда (1.3). В получившемся уравнении

$$\operatorname{div} \frac{\nabla\psi}{\lambda^2 + r^2} = \frac{2\lambda F}{(\lambda^2 + r^2)^2} - \frac{F}{\Phi'} \frac{J'(a) - p'(\psi) V'(a)}{\lambda^2 + r^2} - 4\pi^2 N^2 p'(\psi) \quad (3.69)$$

следует теперь учесть неявную зависимость  $F$  и  $\Phi'$  от тока  $J$  и давления  $p$ . В принципе это можно сделать точно, поскольку в нашем распоряжении имеются два уравнения для этих величин:

$$F' = - \frac{JJ'}{\alpha_{22}^h \Phi'} + J' \frac{\alpha_{23}^h}{\alpha_{22}^h} - \frac{p'V'}{\Phi'}; \quad (3.70)$$

$$F = J \frac{\alpha_{23}^h}{\alpha_{22}^h} + \Phi' \left[ \alpha_{33}^h - \frac{(\alpha_{23}^h)^2}{\alpha_{22}^h} \right], \quad (3.71)$$

первое из которых является следствием уравнения Крускала — Кульсруда (1.3), в котором  $\psi'$  выражена с помощью (3.56) через  $J$  и  $\Phi'$ , а второе получается непосредственно из (3.56). Однако необходимость решать дифференциальное уравнение, чтобы определить из этой системы входящие в (3.69) величины  $F/\Phi'$  и  $F$ , делает эту задачу сложной. Только в случае аксиальной симметрии ( $\alpha_{23}^h = 0$ ,  $\lambda = 0$ ,  $L^2/\kappa^2 = 4\pi^2$ ), когда в (3.69) нужно исключить лишь  $F/\Phi'$ , это отношение определяется явно из (3.71). Уравнение равновесия при этом записывается в виде (4.57) с  $\psi_v = 0$ .

Для обычных стеллараторов (см. гл. 4), пользуясь малостью параметров (4.3), двумерное уравнение равновесия удастся привести к виду (4.56) с  $p$  и  $J$  в правой части с помощью одних лишь алгебраических преобразований. Основное отличие от общего слу-

чая винтовой симметрии состоит в том, что выражение  $\text{div} (\nabla\psi_0 / (R^2 h^2))$ , соответствующее первому члену в правой части (3.69), вычисляется в гл. 4 в приближении  $F = F_0 = \text{const}$  ( $\beta \ll 1$ ) и, кроме того, для величины  $F/\Phi'$  используется приближенное равенство (4.48), не содержащее члена, подобного первому слагаемому в (3.71). В частном случае малых  $\beta$  и сильного продольного поля можно и для стеллараторов с винтовой симметрией сделать подобные упрощения, полагая в (3.69)  $F = F_0$  и пренебрегая в (3.71) членом  $J\alpha_{23}^h / \alpha_{22}^h$ . Уравнение равновесия (3.69) при этом приводится к виду

$$\text{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0^h)}{\lambda^2 + r^2} = -4\pi^2 N^2 \rho'(\psi) \left[ 1 - \left( 1 - \frac{(\alpha_{23}^h)^2}{\alpha_{33}^h \alpha_{22}^h} \right) \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{1}{\lambda^2 + r^2} \right\rangle^{-1} \frac{1}{\lambda^2 + r^2} \right] - J'(a) \frac{\alpha_{33}^h - (\alpha_{23}^h)^2 / \alpha_{22}^h}{\lambda^2 + r^2}, \quad (3.72)$$

где  $\psi_0^h$  — его точное вакуумное решение:

$$\psi_0^h = F_0 r^2 / (2\lambda). \quad (3.73)$$

В стеллараторах с винтовой симметрией теоретически достижимы предельные по равновесию и устойчивости  $\beta$  — порядка 30% [81, 82, 103]. При столь большом давлении плазмы необходимо учитывать диамагнетизм плазмы, т. е. изменение с ростом  $\beta$  зависимости  $F(\psi)$ . Не считая  $\beta$  малым, рассмотрим лишь соответствующий стационарному удержанию плазмы [22] случай  $J(a) = 0$ , когда (3.71) сразу дает необходимое выражение  $F/\Phi'$ , а (3.70) вместе с (3.71) сводится к уравнению для  $F$ :

$$FF'(a) = -\rho'V' [\alpha_{33}^h - (\alpha_{23}^h)^2 / \alpha_{22}^h]. \quad (3.74)$$

Уравнение равновесия (3.69) для бестоковой плазмы принимает вид

$$\text{div} \frac{\nabla\psi}{\lambda^2 + r^2} = \frac{2\lambda F}{(\lambda^2 + r^2)^2} - 4\pi^2 N^2 \rho'(\psi) \left[ 1 - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda^2 + r^2} \left\langle \frac{1}{\lambda^2 + r^2} \right\rangle^{-1} \left( 1 - \frac{(\alpha_{23}^h)^2}{\alpha_{22}^h \alpha_{33}^h} \right) \right], \quad (3.75)$$

где согласно (3.74)  $F$  должно быть определено из уравнения

$$F^2 = F_0^2 + 2 \int_a^b \rho'V' [\alpha_{33}^h - (\alpha_{23}^h)^2 / \alpha_{22}^h] da. \quad (3.76)$$

Здесь  $F_0$  — суммарный полоидальный ток в катушках тороидального поля;  $b$  — значение потоковой координаты  $a$  на границе плазмы. При задании  $\rho(\psi)$  и  $J(\psi)$  уравнение равновесия становится интегродифференциальным, более сложным, чем при классической постановке задачи равновесия — задании полностью определяющих правую часть уравнения равновесия функций  $\rho(\psi)$  и  $F(\psi)$ .

## Глава 4. ТЕОРИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В ОБЫЧНЫХ СТЕЛЛАРАТОРАХ

### 4.1. Стеллараторное приближение

В исследованиях стеллараторов особую роль играет основанный на использовании «стеллараторного разложения» метод усреднения, сводящий исходные трехмерные уравнения равновесия (1.1)

$$\nabla p = [jB], \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} B = j$$

к двумерным. Предложенный в 1958 г. в [36] и развитый затем Грином и Джонсоном [37—41], он долгое время не получал широкого распространения и был по достоинству оценен лишь в 80-е годы, когда стеллараторные исследования заметно оживились. Благодаря тому, что получающиеся в результате усреднения двумерные МГД-уравнения имеют «квазитокамачный» вид, для их решения оказались применимыми различные — как численные, так и аналитические — методы решения аналогичных токамачных уравнений, что позволило в короткий срок решить ряд важных для стеллараторной программы задач (см., например, [20, 142]). Другой привлекательной стороной усредненных двумерных уравнений является их высокая точность — совпадение результатов двумерных и требующих гораздо больше машинной памяти и времени трехмерных численных расчетов [76] показало, что она даже более высока, чем это можно было ожидать [50]. Учитывая важность стеллараторного приближения, подробно опишем процедуру сведения трехмерных уравнений (1.1) к двумерным.

Несмотря на то что уже в [37] было получено скалярное двумерное уравнение равновесия плазмы в стеллараторах, аналогичное уравнению Грэда — Шафранова для аксиально-симметричных систем и позволяющее описать как существующие, так и проектируемые стеллараторы с плоской круговой осью, в начале 80-х годов проблема описания стеллараторов вновь оказалась в центре внимания. Результатом развития новых подходов было не только «переоткрытие» уравнения Грина — Джонсона [37], но и вывод обобщающих его двумерных уравнений, описывающих динамику плазмы [42, 68], равновесие плазмы в стеллараторе с произвольным аспектным отношением [71], а также приведение этих уравнений к виду, допускающему естественное обобщение уже развитых токамачных методов для их решения.

Обсудим вначале выбор малых параметров. Основой стеллараторного приближения [37, 41], используемого в ряде подходов [41, 42, 65—69], является разложение по четырем малым параметрам — обратному аспектному отношению  $A^{-1} \equiv b/R$ , отношению амплитуды вакуумного винтового поля  $B_h$  к напряженности продольного поля  $B_0$ , отношению поля продольного тока  $B_J$  к  $B_0$ , относительно-му диамагнитному изменению продольного поля  $B_\beta/B_0$ . Порядок

этих малых величин определяется соотношениями

$$\varepsilon_n^2 \equiv |B_n|^2/B_0^2 \sim B_\beta/B_0 \sim B_J/B_0 \sim b/R \ll 1. \quad (4.1)$$

Это позволяет описать стеллараторы с вращательным преобразованием вплоть до нескольких единиц. Продольный ток в них может достигать уровня, при котором создаваемое им вращательное преобразование оказывается одного порядка с чисто стеллараторным. Давление плазмы может быть достаточно большим ( $\beta \sim b/R$ ).

Кроме малости параметров (4.1) обычно требуют выполнения по крайней мере еще одного условия. Если стелларатор считается, как в [37, 68, 69], периодическим по продольной координате, т. е. обладающим осью симметрии  $N$ -го порядка, то предполагается либо  $\mu_h/N \ll 1$  [37], где  $\mu_h$  — вакуумное вращательное преобразование, либо  $N \sim R/b \gg 1$  [68, 69]. В [42], где потенциал вакуумного винтового поля  $\varphi_h$  задавался в виде

$$\varphi_h = \sum_j [A_j(r, \varphi) \sin N_j \zeta + B_j(r, \varphi) \cos N_j \zeta],$$

т. е. в принципе допускалось наличие гармоник с некрatными периодами ( $N_j$  — целые числа,  $N_{j+1} > N_j$ ), кроме (4.1) требовалось выполнение еще трех условий:  $N_0 \gg 1$ ,  $|\partial \varphi_h / \partial \zeta| \gg |\partial \varphi_h / \partial \varphi|$  и  $R \frac{B_V}{B_0} \ln x \ll N_j$ ,  $|N_j - N_h|$  при  $j \neq k$ , где  $x$  — произвольная усредненная по  $\zeta$  физическая величина.

В [70, 71] было показано, что двумеризация уравнений (1.1) для стелларатора может быть проведена и без требования  $b/R \ll 1$ , т. е. без ограничений на аспектное отношение. Снимая ограничение на  $b/R$ , авторы [70] накладывали более сильное, чем в обычном стеллараторном приближении, ограничение  $\beta \sim O(\varepsilon_h^4)$ , и, кроме того, ограничение на вращательное преобразование:  $\mu \sim O(\varepsilon_h^2)$ . В [71] дополнительными ограничениями были:  $\mu l/m \ll 1$ , где  $l$  — заходность стелларатора,  $m$  — число периодов винтового поля;  $\mu \mu_h b^2/R^2 \ll 1$ .

Вычисления начнем, считая малыми два параметра,  $\varepsilon_h$  и  $\beta$ . Чтобы избежать неоправданных усложнений, в ходе вычислений введем еще два малых параметра,  $\mu l/m$  и  $\mu \alpha_{23}^* / \alpha_{33}^*$ . Здесь по-прежнему  $\mu$  — вращательное преобразование;  $l$  — заходность;  $m$  — число периодов винтового поля;  $\alpha_{ik}^* \equiv \langle \overline{g_{ik}} / \sqrt{g} \rangle_\zeta$ ;  $g_{ik}$  — элементы метрического тензора потоковой системы координат;  $g \equiv |\det g_{ik}|$ . Ниже показано, что не аспектное отношение  $A$  само по себе, а величина  $\varepsilon_h^2 A$  является важной характеристикой стелларатора. Получив скалярное двумерное уравнение равновесия без ограничения на эту величину, обсудим подробно два случая:  $\varepsilon_h^2 A \gg 1$  (при этом  $A \gg 1$ , так как по предположению  $\varepsilon_h^2 \ll 1$ ), когда возникающие при усреднении члены  $\sim \varepsilon_h^2$  могут конкурировать с тороидальными поправками, и противоположный случай,  $\varepsilon_h^2 A \ll 1$ .

Вид получающихся уравнений, их содержание и область применимости, естественно, зависят от соотношений между величинами,

по которым производится разложение. Поскольку наш выбор малых параметров

$$\varepsilon_h \equiv |B_h|/B_0, \quad \beta, \mu/m, \quad \mu\alpha_{23}^{\xi}/\alpha_{33}^{\xi} \quad (4.2)$$

отличается от традиционного (4.1), остановимся на этом вопросе подробнее в конце этой главы.

#### 4.2. Поточковые координаты, основные уравнения, особенности их решения методом разложения

Одним из удобных методов, широко применяемых в теории равновесия и устойчивости плазмы, является метод обращения переменных. Использование поточковых координат позволяет существенно упростить аналитические выкладки (в силу  $\mathbf{B}\nabla a = \mathbf{j}\nabla a = 0$ ), а в численных расчетах — легко обеспечить необходимую точность определения формы и взаимного расположения магнитных поверхностей. При упрощении уравнений равновесия (1.1) с самого начала будем пользоваться поточковой системой координат. Определенная сложность использования этих координат связана с тем, что они не ортогональны. Необходимые для теории равновесия и устойчивости сведения о них содержатся в [108] и в гл. 2.

В произвольной поточковой системе координат  $(a, \theta, \zeta)$  уравнения, описывающие равновесную конфигурацию, можно, используя одновременно токовое и поточковое представления поля (2.23), (2.11), записать в виде [24]

$$p'(a) = \sqrt{g} (j^2 B^3 - j^3 B^2); \quad (4.3)$$

$$B_i = g_{ik} B^k, \quad (4.4)$$

где  $g_{ik}$  — элементы метрического тензора системы координат  $(a, \theta, \zeta)$ ;  $g = |\det g_{ik}|$ . Входящие в (4.4) компоненты магнитного поля  $B^i$  и  $B_i$  согласно (2.11), (2.23) выражаются через тороидальные и внешние полоидальные потоки  $\Phi$  и  $\psi$  и токи  $J$  и  $F$  и неизвестные периодические по  $\theta$  и  $\zeta$  функции  $\varphi, \eta, \nu$  (см. также [108, 138])

$$\left. \begin{aligned} B^i &= \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left\{ 0, \quad -\psi' - \frac{\partial\eta}{\partial\zeta}, \quad \Phi' + \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \right\}; \\ B_i &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial a} - \nu, \quad J + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad F + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Токовое представление поля (2.23) позволяет получить для компонент плотности тока  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  выражения, аналогичные  $B^i$  (4.5):

$$j^i = \frac{1}{2\pi\sqrt{g}} \left\{ 0, \quad -F' - \frac{\partial\nu}{\partial\zeta}, \quad J' + \frac{\partial\nu}{\partial\theta} \right\}. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.3) и (4.4) служат для определения метрического тензора  $(g_{ik})$ , вид которого зависит как от формы и взаимного расположения магнитных поверхностей, так и от выбора угловых переменных  $\theta$  и  $\zeta$ .

Переход от «лабораторной» квазицилиндрической системы ко-

ординат  $(r, \omega, \zeta)$ , связанной с круговой геометрической осью стелларатора, к потоковой  $(x^i) = (a, \theta, \zeta)$  может быть в самом общем виде записан с помощью четырех функций:

$$\left. \begin{aligned} r &= \rho(a, \theta) + \delta(a, \theta, \zeta); \\ \omega &= u(a, \theta) + \lambda(a, \theta, \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

Функции  $\rho$  и  $u$  описывают форму магнитных поверхностей «в среднем», а осциллирующие по  $\zeta$  функции  $\delta$  и  $\lambda$  позволяют учесть трехмерность конфигурации. Если вакуумные магнитные поверхности «в среднем» круглые, то  $\rho$  и  $u$  можно рассматривать как вакуумные потоковые координаты [65].

В качестве  $x^3$  будем использовать полярный угол  $\zeta$  цилиндрической системы координат, связанной с главной осью тора. Такой выбор  $\zeta$  является традиционным. Угол  $\theta$  обычно выбирают из соображений удобства вычислений. В отличие от работ [65, 67], по аналогии с которыми в настоящей работе делается ряд вычислений, будем считать угол  $\theta$  произвольным. При этом, однако, за счет  $\lambda$  в (4.7) можно сделать функцию  $\eta$  не зависящей от  $\zeta$ . Всюду в дальнейшем будем считать  $\eta = \eta(a, \theta)$ . Более подробное обсуждение выбора угловых координат  $\theta, \zeta$  и детальное описание свойств потоковых координат содержатся в гл. 2.

Метрические коэффициенты  $g_{ik}$ , определяющие квадрат элемента длины  $d l^2 = g_{ik} dx^i dx^k$  в координатах  $(a, \theta, \zeta)$ , выражаются через функции  $\rho, u, \delta$  и  $\lambda$  после подстановки  $r$  и  $\omega$  в виде (4.7) в формулу

$$d l^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + R^2 h_s^2 d\zeta^2 \quad (4.8)$$

или по правилу [108]

$$g_{ik} = \frac{\partial r}{\partial x^i} \frac{\partial r}{\partial x^k} + r^2 \frac{\partial \omega}{\partial x^i} \frac{\partial \omega}{\partial x^k} + R^2 h_s^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} \frac{\partial \zeta}{\partial x^k}, \quad (4.9)$$

где  $h_s = 1 - kr \cos \omega$ ;  $k$  — кривизна круговой геометрической оси стелларатора;  $2\pi R$  — ее полная длина. Удобно поступить следующим образом: сначала, рассматривая в (4.7)  $\rho$  и  $u$  как независимые координаты, определить тензор  $(g_{ik}^0)$  системы координат  $(\rho, u, \zeta)$ , а затем уже, воспользовавшись двумерностью перехода  $(\rho, u) \rightarrow (a, \theta)$ , — необходимый тензор  $(g_{ik})$ . Его элементы и  $\sqrt{g} = |\det g_{ik}|$  связаны с  $g_{ik}^0$  и  $\sqrt{g^0} = |\det g_{ik}^0|$  простыми соотношениями [71]:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= g_{11}^0 \rho'^2 + 2g_{12}^0 \rho' u' + g_{22}^0 u'^2; \\ g_{12} &= g_{11}^0 \rho' \dot{\rho} + g_{12}^0 (\rho' \dot{u} + \dot{\rho} u') + g_{22}^0 u' \dot{u}; \\ g_{22} &= g_{11}^0 \dot{\rho}^2 + 2g_{12}^0 \dot{\rho} \dot{u} + g_{22}^0 \dot{u}^2; \\ g_{13} &= g_{13}^0 \rho' + g_{23}^0 u'; \\ g_{23} &= g_{13}^0 \dot{\rho} + g_{23}^0 \dot{u}; \\ g_{33} &= g_{33}^0; \quad \sqrt{g} = D \sqrt{g^0}. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Здесь штрихом обозначена производная по  $a$ , точкой — производная по  $\theta$ ;  $D = \rho' \dot{u} - \rho u'$  — якобиан преобразования  $(\rho, u) \rightarrow (a, \theta)$ , который всегда выбором знака  $\theta$  можно сделать неотрицательным. Элементы метрического тензора  $(g_{ik}^0)$ , вычисленного по аналогии с [65], но без разложения по  $kr$ , приведены в приложении 1. Как и в [65, 67], будем считать малыми по сравнению с единицей величины  $|\delta|/\rho$ ;  $|\delta u'|/\rho$ ;  $|\lambda|$ ;  $|\lambda u'|$ . Это означает, что рассматривается только область, далекая от вакуумной сепаратрисы. Но поскольку никаких предположений о виде функции  $\rho(a, \theta)$  не делается, при наличии плазмы форма магнитных поверхностей и положение сепаратрисы могут быть в этой области любыми.

Трехмерные уравнения (4.3) и (4.4) будем решать методом разложения, считая малыми  $|\mathbf{B}_h|/B_0$  и  $\beta = 2\rho/B_0^2$ . Основные этапы вычислений, в ходе которых будут введены ограничения и на другие величины, легко показать на примере решения методом возмущений [9] уравнения

$$\mathbf{B} \nabla \psi = 0, \quad (4.11)$$

определяющего магнитные поверхности (см. также [37, 41]).

Принятое предположение о малости величины  $\varepsilon_h$  позволяет представить  $\mathbf{B}$  и  $\psi$  в (4.11) в виде разложения  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}_h$ ,  $\psi = \psi^0 + \psi$ , где  $\mathbf{B}_h$  и  $\psi$  — малые по сравнению с  $\mathbf{B}^0$  и  $\psi^0(r, \omega)$  осциллирующие по  $\xi$  величины, и свести (4.11) к двум уравнениям — двумерному для  $\psi^0$  и трехмерному для  $\psi$ :

$$\mathbf{B}^0 \nabla \psi^0 = - \langle \mathbf{B}_h \nabla \psi \rangle_{\xi}; \quad \mathbf{B}^0 \nabla \psi = - \mathbf{B}_h \nabla \psi^0. \quad (4.12)$$

Последнее уравнение, в котором  $\mathbf{B}^0 \nabla \psi$  можно заменить на  $\mathbf{B}^0 \nabla \xi \partial \psi / \partial \xi$  (подробнее об этом упрощении — см. ниже), служит для нахождения функции  $\psi$ :

$$\psi = - (R h_s / B_{\xi}^0) \widehat{\mathbf{B}}_h \nabla \psi^0. \quad (4.13)$$

При  $\beta \ll 1$  можно считать  $B_{\xi}^0$  и  $\mathbf{B}_h$  заданными,  $B_{\xi}^0 = B_0 / h_s$ ,  $\mathbf{B}_h = \nabla \varphi_h$ , таким образом в линейном по  $\varepsilon_h$  приближении функция  $\psi$  выражается через одну неизвестную функцию —  $\psi^0$ :

$$\psi = \psi^0(r, \omega) - h_s^2 (R / B_0) \widehat{\nabla \varphi_h} \nabla \psi^0. \quad (4.14)$$

Здесь и далее

$$\widehat{f} = \int f d\xi; \quad \widetilde{f} = f - \langle f \rangle_{\xi}; \quad \langle f \rangle_{\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\xi. \quad (4.15)$$

Функция  $\psi$  (4.14), зависящая от  $r$ ,  $\omega$  и  $\xi$ , может быть представлена как функция двух переменных:  $r^* = r^*(r, \omega, \xi)$  и  $\omega^* = \omega^*(r, \omega, \xi)$ . Действительно, правую часть (4.14) можно рассматривать как обычное разложение по формуле Тейлора

$$\psi(r + \delta r) = \psi(r) + \delta r \nabla \psi(r)$$



и записать (4.14) в виде

$$\psi(r, \omega, \xi) = \psi^0(r + \delta r, \omega + \delta\omega), \quad (4.16)$$

где

$$\delta r = -h_s^2 \frac{R}{B_0} \frac{\partial \widehat{\varphi}_h}{\partial r}; \quad \delta\omega = -h_s^2 \frac{R}{B_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \widehat{\varphi}_h}{\partial \omega}. \quad (4.17)$$

В переменных  $r^* = r + \delta r$ ,  $\omega^* = \omega + \delta\omega$  выражение (4.16) — двумерное.

Первый этап перехода к потоковым координатам, которые здесь используются при упрощении уравнений равновесия, как раз и состоит в нахождении такого преобразования (функций  $\delta$  и  $\lambda$ ), сводящего задачу к двумерной.

В потоковых координатах, которые мы используем, величины  $\sqrt{g} B^i$  не зависят от  $\xi$ . Поэтому при выделении из уравнения (4.3) не зависящей от  $\xi$  части необходимо определить лишь  $\langle j^2 \rangle_\xi$  и  $\langle j^3 \rangle_\xi$ . Мы будем вычислять величины  $\langle \sqrt{g} j^2 \rangle_\xi$  и  $\langle \sqrt{g} j^3 \rangle_\xi$  [усреднять (4.3) по  $\xi$  после умножения его на  $\sqrt{g}$ ], которые в силу  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  связаны с  $\langle B_i \rangle_\xi$ . Часть вычислений при получении явных выражений  $\langle B_i \rangle_\xi$  из (4.4) эквивалентна стандартной процедуре [37, 41] нахождения  $B^0$  из первого уравнения (4.12), сводящегося с учетом (4.13) к

$$\left( B^0 + \frac{1}{2\pi} [\nabla\psi_v \nabla\zeta] \right) \nabla\psi^0 = 0, \quad (4.18)$$

подробнее — см. приложение 2. На этом этапе вычислений возникает функция  $\psi_v$  (П2.12). Это одна из основных характеристик стелларатора. Она описывает усредненные вакуумные магнитные поверхности:  $\psi_{\text{vac}}^0 = \psi_v$ . В общем случае функция  $\psi^0$  должна определяться из уравнения равновесия  $\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}]$  (см. двумерные уравнения, разд. 4.4). Для вакуума же потоковую функцию  $\psi_{\text{vac}}^0$  можно определить прямо из (4.18). Среднее вакуумное поле  $B_{\text{vac}}^0$  имеет только продольную составляющую, поэтому из (4.18) для  $\psi_{\text{vac}}^0$  получается уравнение

$$[\nabla\psi_v \nabla\zeta] \nabla\psi_{\text{vac}}^0 = 0,$$

из которого следует  $\psi_{\text{vac}}^0 = \psi_{\text{vac}}^0(\psi_v)$  и, в частности, можно положить  $\psi_{\text{vac}}^0 = \psi_v$ .

Отметим два обстоятельства, на которые обычно не обращают внимания при решении уравнения (4.11). Во-первых, при замене (4.11) двумя уравнениями (4.12) во втором уравнении был отброшен член  $B_h \nabla\psi$ , который по предположению мал по сравнению с  $B_h \nabla\psi^0$ . На магнитной оси это условие не выполняется:  $B_h \nabla\psi = -B_h \nabla\psi^0$ , так как  $\nabla\psi = \nabla(\psi^0 + \tilde{\psi}) = 0$ . Следовательно, магнитная ось определяется неточно. Естественно, ее точное положение может быть определено лишь при полном учете всех полей. Во-вторых, решая, как обычно, второе уравнение (4.12), мы в его левой части

сохранили единственный член  $B^{03} \partial \tilde{\psi} / \partial \xi = (B_0 / h_s^2 R) \partial \tilde{\psi} / \partial \xi$ , после чего получили (4.13) и (4.14). Ясно, что при этом в скалярном произведении  $\mathbf{V}^0 \nabla \tilde{\psi}$  должны быть малы по сравнению с ним два других члена:  $B_\omega^0 \partial \tilde{\psi} / r \partial \omega$  и  $B_r^0 \partial \tilde{\psi} / \partial r$ . Однако в том случае, когда магнитная ось  $a=0$  не совпадает с геометрической  $r=0$ , два условия

$$X \equiv \left| B^{03} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} / \frac{B_\omega^0}{r} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \omega} \right| \gg 1; \quad \left| B^{03} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \xi} / B_r^0 \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \right| \gg 1,$$

нарушаются при  $r=0$  и, следовательно, наша процедура определения  $\tilde{\psi}$  становится при  $r \rightarrow 0$  некорректной. Если  $\tilde{\psi} \sim \cos(l\omega - m\xi)$ , то

$$X = \frac{m}{l} \frac{B_0 r}{h_s^2 R B_\omega^0} \approx \frac{m}{l} \frac{r}{r_0} \frac{1}{\mu(r_0)},$$

где  $r_0$  — средний радиус сечения  $\xi = \text{const}$  магнитной поверхности, проходящей через геометрическую ось  $r=0$ ;  $\mu(r_0)$  — вращательное преобразование на этой поверхности. Очевидно, условие  $X \gg 1$  нарушается в области

$$r/r_0 \leq \mu(r_0) l/m. \quad (4.19)$$

В стеллараторах эта величина обычно бывает малой (примерно 0,1—0,25), поэтому неточность определения  $\tilde{\psi}$  в этой области несущественна.

### 4.3. Сведение трехмерных уравнений равновесия к двумерным

Цель рассмотрения состоит в решении трехмерного уравнения равновесия

$$4\pi^2 \sqrt{g} p' = \psi' \left( J' + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \left( F' + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right), \quad (4.20)$$

которое получается из уравнения (4.3) в результате умножения его на  $4\pi^2 \sqrt{g}$  и подстановки компонент  $j^i$ ,  $B^i$  в виде (4.5), (4.6) и системы трех вспомогательных уравнений

$$\left. \begin{aligned} -v + \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \psi' + \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right); \\ J + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \psi' + \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right); \\ F + \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= -\frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \psi' + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

выражающих связь (4.4) ко- и контравариантных компонент вектора  $\mathbf{V}$ .

Выделение из уравнений (4.20) и (4.21) осциллирующих по  $\xi$  составляющих дает уравнения для функций  $\delta$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi$  и  $v$ . Решая их

так же, как и в [90], для  $\tilde{\varphi}$  получаем уравнение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} h \rho \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial u} h \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial u} + \frac{1}{hR^2} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (4.22)$$

где  $h = 1 - k\rho \cos u$ . Таким образом,

$$\tilde{\varphi} = 2\pi\varphi_h(\rho, u, \zeta), \quad (4.23)$$

где  $\varphi_h$  — потенциал вакуумного поля, созданного винтовыми обмотками:  $\mathbf{B}_h = \nabla\varphi_h(r, \omega, \zeta)$ . Заметим, что уравнение (4.22) можно записать в виде  $\Delta\varphi = 0$ , если формально рассматривать систему координат  $(\rho, u, \zeta)$  как квазицилиндрическую.

Функции  $\delta$  и  $\lambda$  выражаются, как и  $\tilde{\varphi}$ , через  $\varphi_h$  [ср. с (4.17)]

$$\delta = h^2 \frac{\partial \hat{f}}{\partial \rho}, \quad \lambda = \frac{h^2}{\rho^2} \frac{\partial \hat{f}}{\partial u}, \quad (4.24)$$

где  $\hat{f} = (R/B_0)\varphi_h(\rho, u, \zeta)$ ;  $B_0$  — напряженность продольного поля на геометрической оси стелларатора. При  $kr \ll 1$  выражения (4.24) совпадают с результатом [90].

В уравнениях (4.21) для осциллирующих составляющих члены  $(g_{i2}/\sqrt{g})\psi'$  не учтены, так как всюду, за исключением малой области (4.19), эти члены малы:  $|\overline{g_{i2}/\sqrt{g}}| \psi' \ll |\overline{g_{i3}/\sqrt{g}}| (\Phi' + \partial\eta/\partial\theta)$ . Малой оказывается и функция  $\tilde{v}$  (порядка  $\rho' \Phi/B_0^2$ ), поэтому в левой части первого уравнения (4.21) сохраняем лишь  $\partial\tilde{\varphi}/\partial a$ .

Переходим теперь к преобразованию двумерных уравнений, к которым свелись (4.20) и (4.21) после исключения осциллирующих по  $\zeta$  составляющих. В двумерном уравнении

$$4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta} \frac{d\rho}{d\psi} = \left\langle J' + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\rangle_{\zeta} - \frac{dF}{d\psi} \left( \Phi' + \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right), \quad (4.25)$$

которое получается из (4.20), необходимо исключить функции  $v$  и  $\eta$ . Из последнего уравнения (4.21) с точностью до членов порядка  $\mu \alpha_{23}^{\zeta}/\alpha_{33}^{\zeta}$  определяем

$$\Phi' + \partial\eta/\partial\theta = F/\alpha_{33}^{\zeta} \quad (4.26)$$

и из первых двух, исключая  $\varphi$ , получаем

$$\begin{aligned} J' + \frac{\partial \langle v \rangle_{\zeta}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha_{12}^{\zeta} \psi') - \frac{\partial}{\partial a} (\alpha_{22}^{\zeta} \psi') + \\ &+ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\alpha_{23}^{\zeta}}{\alpha_{33}^{\zeta}} F \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\alpha_{13}^{\zeta}}{\alpha_{33}^{\zeta}} F \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $\alpha_{ik}^{\zeta} \equiv \langle g_{ik}/\sqrt{g} \rangle_{\zeta}$ . (4.28)

Входящие в (4.27) величины  $\alpha_{ik}^{\zeta}$ , вычисленные, в отличие от [67], без разложения по  $k\rho$  и с учетом «взаимодействия» гармоник,

имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 \alpha_{12}^{\zeta} &= \frac{\rho' \dot{\rho} + \rho^2 u' \dot{u}}{\rho D h R}; & \alpha_{22}^{\zeta} &= \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{u}^2}{\rho D h R}; \\
 \alpha_{13}^{\zeta} &= \frac{1}{2\pi R B_0 D} \left\{ u' \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} - \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial \psi_v}{\partial u} \right\} = \\
 &= -\frac{1}{2\pi R B_0} \left\{ \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi_v}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial u} \right\}; \\
 \alpha_{23}^{\zeta} &= \frac{1}{2\pi R B_0 D} \left\{ \dot{u} \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \frac{\partial \psi_v}{\partial u} \right\} = \\
 &= \frac{1}{2\pi R B_0} \left\{ \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho} \frac{\partial a}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \psi_v}{\partial u} \frac{\partial a}{\partial u} \right\}; \\
 \alpha_{33}^{\zeta} &= \frac{R h}{\rho D} (1 + f_2); & \langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta} &= R h \rho D (1 + f_1),
 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

где  $f_1$ ,  $f_2$  и  $\psi_v$  — функции, получающиеся при усреднении квадратичных по  $\delta$  и  $\lambda$  комбинаций (см. приложение 1). Отметим, что первые два выражения в (4.29) имеют чисто «токамачный» вид [67]. Два последних отличаются от «токамачных» малыми поправками  $f_1$  и  $f_2$ , учет которых, однако, принципиально важен при малом или равном нулю продольном токе  $J$ . Величины  $\alpha_{13}^{\zeta}$  и  $\alpha_{23}^{\zeta}$ , которые для токамака равны нулю, выражаются через функцию  $\psi_v$  [см. также (П2.11)]

$$\psi_v = \frac{2\pi R^2}{B_0} \frac{h^3}{\rho} \left\langle \frac{\partial \varphi_h}{\partial \rho} \frac{\partial \widehat{\varphi}_h}{\partial u} \right\rangle_{\zeta}, \quad (4.30)$$

которая, как было показано, определяет семейство вакуумных магнитных поверхностей — их уравнение имеет вид  $\psi_v = \text{const}$ .

Входящие в (4.27) величины  $\alpha_{12}^{\zeta} \psi'$  и  $\alpha_{22}^{\zeta} \psi'$  могут быть записаны подобно выражениям  $\alpha_{13}^{\zeta}$  и  $\alpha_{22}^{\zeta}$ :

$$\left. \begin{aligned}
 \psi' \alpha_{12}^{\zeta} &= \frac{\rho}{h R} \left( u' \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right); \\
 \psi' \alpha_{22}^{\zeta} &= \frac{\rho}{h R} \left( \dot{u} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} - \frac{\dot{\rho}}{\rho^2} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

К такому же виду, но с заменой  $\psi$  на  $\psi_v$ , приводятся и выражения  $\alpha_{13}^{\zeta} F/\alpha_{33}^{\zeta}$  и  $\alpha_{23}^{\zeta} F/\alpha_{33}^{\zeta}$  при подстановке вместо  $F$  его приближенного (вакуумного) значения  $2\pi R B_0$  и отбрасывании в  $\alpha_{33}^{\zeta}$  малой величины  $f_1$ . Подставляя эти выражения в (4.27), получаем (с точностью до членов порядка  $\beta$  и  $\epsilon_h^2$  по отношению к основным)

$$J' + \frac{\partial \langle v \rangle_{\zeta}}{\partial \theta} = \frac{D}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho}{h} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial u} \frac{\rho}{h} \frac{\partial}{\partial u} \right] (\psi_v - \psi). \quad (4.32)$$

Функции  $\psi_v$  и  $\psi$  зависят только от  $\rho$  и  $u$ , поэтому в оператор [...] в (4.32) можно добавить дифференцирование по  $\zeta$ , так что он превратится в  $\rho h \operatorname{div}(\nabla/h^2)$ , записанный в координатах  $(\rho, u, \zeta)$  в «ну-

левом» приближении, т. е. так, как если бы  $\rho$ ,  $u$ ,  $\xi$  была квазицилиндрической системой координат. В дальнейшем будет использована именно такая компактная запись.

Подставляя теперь (4.26) и (4.32) в (4.25), получаем окончательно скалярное двумерное уравнение равновесия

$$\operatorname{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0)}{R^2 h^2} = - \frac{1}{\rho DRh} \left[ 4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle_{\xi} p'(\psi) + \frac{FF'(\psi)}{\alpha_{33}^{\uparrow}} \right], \quad (4.33)$$

которое можно записать с учетом (4.29) в виде

$$\operatorname{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0)}{R^2 h^2} = - 4\pi^2 p'(\psi) (1 + f_1) - \frac{FF'(\psi)}{R^2 h^2 (1 + f_2)}. \quad (4.34)$$

В потоковых координатах  $(a, \theta, \xi)$  скалярное двумерное уравнение равновесия имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} (\alpha_{22}^{\uparrow} \psi') - \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha_{12}^{\uparrow} \psi') = & - 4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle_{\xi} p'(\psi) - \frac{FF'(\psi)}{\alpha_{33}^{\uparrow}} + \\ & + \frac{D}{R} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\rho}{h} \frac{\partial \psi_0}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\rho}{h} \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

#### 4.4. Анализ двумерных уравнений и другие их формулировки

Итак, трехмерные уравнения равновесия (4.20), (4.21) свелись к одному скалярному двумерному уравнению (4.34) для функции  $\psi(\rho, u)$  или (4.35) для  $\rho(a, \theta)$ . «Квазицилиндрические» координаты  $\rho, u$ , в которых записано уравнение (4.34) и дифференциальный оператор в правой части (4.35), связаны с опорной системой координат  $(r, \omega, \xi)$  трехмерными соотношениями (4.7) с  $\delta$  и  $\lambda$  в виде (4.24).

Двумерное уравнение (4.34) получено с точным учетом тороидальности, без разложения по  $kr$ , поэтому оно точно переходит при  $f_h \rightarrow 0$  в уравнение Грэда — Шафранова для осесимметричных систем

$$\operatorname{div} (\nabla \psi / R^2 h^2) = - 4\pi^2 p'(\psi) - FF'(\psi) / (R^2 h^2). \quad (4.36)$$

Переход же уравнения Грина — Джонсона [37, 41], а также уравнения из [66] к (4.36) осуществляется лишь в приближении большого аспектного отношения.

Уравнение для стелларатора (4.34) отличается от токамачного (4.36), методы решения которого хорошо разработаны [108], во-первых, тем, что содержит в левой части функцию  $\psi_0$  — усредненный полоидальный поток вакуумных винтовых полей. Второе отличие связано с малыми поправками  $f_1$  и  $f_2$  (III.4), которые приводят к появлению в уравнении для смещения члена с магнитным бугром [40, 65].

Функция  $\psi_0(\rho, u)$ , однозначно определяемая заданием потенциала винтового поля  $f_h$  (4.30), является важнейшей характеристикой конфигурации вакуумного поля стелларатора. Она описывает се-

мейство усредненных вакуумных поверхностей (не обязательно вложенных торов); их уравнение, как это следует из (4.34),  $\psi_0(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Создать необходимое для удержания плазмы семейство вложенных тороидальных магнитных поверхностей (в стеллараторе с большим аспектным отношением) довольно просто — достаточно одной гармонике винтового поля. Эти поверхности могут в определенных пределах сохранять желаемую топологию и при наличии дополнительных гармоник винтового поля [37]. Они способны выдерживать также (при величинах  $\beta$  меньше критической) возмущения, вносимые плазмой.

Остановимся на значении учета малых членов  $f_1$  и  $f_2$  в правой части уравнения (4.34). Очевидно, они играют такую же роль, как и аналогичные члены  $kr \cos \omega$  в токамаке с  $A \gg 1$ . Для токамака с  $A \gg 1$  сохранение малой величины  $kr \cos \omega$  под оператором  $\text{div}$  в уравнении (4.36) позволяет описать связанное с тороидальностью вакуумное ( $\beta \rightarrow 0$ ) смещение с  $|\Delta'| \sim ka \ll 1$ , а наличие  $kr \cos \omega$  в правой части и перед производными в операторе  $\text{div}$  — смещение из-за конечности давления, которое в  $\beta_p$  (полоидальное  $\beta$ , достигающее значений порядка  $A$ ) раз больше вакуумного. Поэтому, сохраняя  $f_1$  и  $f_2$  в  $\langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta}$  и  $\alpha_{33}^{\zeta}$ , мы пренебрегли аналогичными поправками  $\sim \varepsilon_h^2$  в левой части (4.33), пользуясь при выводе этого уравнения вычисленными в «нулевом» приближении величинами  $\alpha_{ik}^{\zeta}$  (4.29).

Конкурируя с  $kr \cos \omega$ , члены  $f_1$  и  $f_2$  важны лишь при  $\varepsilon_h^2 \geq A^{-1}$ . При малых  $A$ , т. е. для компактных стеллараторов,  $f_1$  и  $f_2$  можно опустить; при этом уравнение (4.34) переходит в уравнение Лортца и Нюрнберга [70]:

$$\text{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0)}{R^2 h^2} = -4\pi^2 p'(\psi) - \frac{FF'(\psi)}{R^2 h^2}. \quad (4.37)$$

Для стеллараторов с большим аспектным отношением,  $kr \ll 1$ , для случая, когда величина

$$j_{\zeta}(\psi) \equiv 2\pi R p'(\psi) + FF'(\psi)/(2\pi R) \quad (4.38)$$

не очень велика по сравнению с  $2\pi R p'(\psi) \Omega^0$ , где (с точностью до малых тороидальных поправок)

$$\Omega^0 \equiv f_1 + f_2 = \langle (\nabla \psi)^2 \rangle_{\zeta} / B_0^2, \quad (4.39)$$

уравнение (4.34) может быть приведено к более простому виду так, что вместо  $f_1$  и  $f_2$ , входящих раздельно в (4.34), в уравнение равновесия войдет их сумма  $\Omega^0$ :

$$\text{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0)}{R^2 h^2} = -4\pi^2 p'(\psi) (1 + \Omega^0) - \frac{FF'(\psi)}{R^2 h^2} \quad (4.40)$$

или

$$\text{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0)}{R^2 h^2} = -4\pi^2 p'(\psi) - \frac{FF'(\psi)}{R^2 h^2} (1 - \Omega^0). \quad (4.41)$$

При переходе к этим уравнениям после выделения в правой части (4.34) выражения  $2\pi j_z(\psi)/R$  члены, содержащие  $f_1$  и  $f_2$ , преобразуем, используя приближенное равенство  $4\pi^2 R^2 p'(\psi) \approx FF'(\psi)$ .

Очевидно, в силу  $kr \ll 1$  уравнения (4.40) и (4.41) могут быть преобразованы к виду

$$\Delta A = -2\pi R p'(\psi) \Omega - j_z(\psi); \quad (4.42)$$

$$\Delta A = \frac{FF'(\psi)}{R^2} \Omega - j_z(\psi), \quad (4.43)$$

где

$$\Omega \equiv \Omega^0 - 2kr \cos u; \quad A \equiv (\psi - \psi_0)/(2\pi R). \quad (4.44)$$

Уравнение (4.42) — это уравнение Грина — Джонсона [37, 41]. Совершая переход к нему от (4.40), мы положили в левой части (4.40)  $h=1$ . Замена  $h$  единицей под оператором  $\text{div}$  в уравнении (4.40) соответствует, как уже отмечалось, пренебрежению связанным с тороидальностью вакуумным смещением (с  $|\Delta'| \sim ka$ ).

Обсудим содержание условия  $j_z(\psi)/2\pi R p'(\psi) \Omega^0 = O(1)$ , используемого при приведении уравнения (4.34) к виду (4.40) или (4.41). Преобразуем вначале величину  $j_z(\psi)$ . Из уравнения баланса давлений

$$p'V' = J'\psi' - F'\Phi', \quad (4.45)$$

которое получается при усреднении (4.20) по  $\theta$  и  $\zeta$ , следует, что

$$j_z(\psi) = 2\pi R p'(\psi) \left[ 1 - \frac{FV'}{4\pi^2 R^2 \Phi'} \right] - \mu J'(\psi) \frac{F}{2\pi R}, \quad (4.46)$$

где  $\mu$  — вращательное преобразование:

$$\mu = -\psi'/\Phi'. \quad (4.47)$$

Связь  $F$  и  $\Phi'$  получаем из уравнения (4.26)

$$\Phi' = F \left\langle \frac{1}{\alpha_{33}^r} \right\rangle_{\theta} = F \frac{V'(a)}{4\pi^2} \left\langle \frac{1}{\langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta} \alpha_{33}^r} \right\rangle = \frac{FV'}{4\pi^2 R^2} \left\langle \frac{1}{h^2(1+\Omega^0)} \right\rangle, \quad (4.48)$$

где  $\langle \rangle$  — усреднение по слою между близкими магнитными поверхностями:

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{dV} \int f d\tau = \frac{4\pi^2}{V'(a)} \langle f \sqrt{g} \rangle_{\theta, \zeta}. \quad (4.49)$$

Подставляя в таком виде  $\Phi'$  в (4.46), получаем связь  $j_z(\psi)$  с  $p$  и  $J$ :

$$j_z(\psi) = 2\pi R p'(\psi) \left[ 1 - \left\langle \frac{1}{h^2(1+\Omega^0)} \right\rangle^{-1} \right] - \mu J'(\psi) \frac{F}{2\pi R}. \quad (4.50)$$

Для стелларатора с большим аспектным отношением ( $kr \ll 1$ )

$$j_z(\psi) = -2\pi R p'(\psi) \langle \Omega \rangle - \mu J'(\psi) F/(2\pi R). \quad (4.51)$$

Здесь  $\Omega$  — величина (4.44).

Первый член в полученном выражении (4.51) по порядку величины таков же, как и величина  $2\pi R\rho'\Omega^0$ , с которой мы сравниваем  $j_z(\psi)$ . Условие  $j_z(\psi)/2\pi R\rho'\Omega^0 = O(1)$  сводится таким образом к ограничению на продольный ток:

$$\mu | J'(\psi) | F \leq 4\pi^2 R^2 | \rho'(\psi) | B_h^2/B_0^2. \quad (4.52)$$

Используя простые оценки  $|J'(\psi)/\rho'(\psi)| \sim |J/\rho|$ ;  $F = 2\pi R B_0$ ;  $\rho/B_0^2 \sim \beta$ ;  $\mu_J \sim RJ/2\pi b^2 B_0$ , это условие можно привести к виду

$$\mu_J/\mu \leq (R/b) (B_h^2/B_0^2) \beta/\beta_{\text{eq}}, \quad (4.53)$$

где  $\beta_{\text{eq}} = \mu^2 b/R$ . Величины  $b/R = A^{-1}$  и  $B_h^2/B_0^2$  в нашем случае, когда имеет смысл сохранять  $f_1$  и  $f_2$  в уравнении (4.34), должны быть одного порядка малости. При этом неравенство (4.53) может быть записано как

$$\mu_J/\mu \leq \beta/\beta_{\text{eq}}. \quad (4.54)$$

Оно оказывается довольно мягким. При большом давлении плазмы ( $\beta \sim \beta_{\text{eq}}$ ) оно не дает никакого ограничения на продольный ток.

Итак, при  $A^{-1} \leq B_h^2/B_0^2$  (традиционно используемое приближение в теории стеллараторов [37—41]) и при дополнительном слабом условии (4.54) равновесие плазмы в стеллараторе описывается одним из двух эквивалентных скалярных двумерных уравнений (4.42) и (4.43), которые отличаются от аналогичного уравнения (4.37) для стелларатора с малым аспектным отношением,  $A^{-1} \gg \gg B_h^2/B_0^2$ , наличием члена  $\Omega^0$  в правой части. Отметим, что в рассматриваемом случае порядок стеллараторного члена  $\Omega^0$  в правой части уравнения такой же, как и остальных, поэтому его учет принципиально важен в отличие от случая малого аспектного отношения.

Приведем еще одну формулировку скалярного двумерного уравнения равновесия, удобную при расчете равновесия бестоковой плазмы. С помощью формулы (4.48), связывающей  $\Phi'$  с  $F$ , можно выразить из уравнения баланса давлений (4.45) входящую в уравнение равновесия (4.34) величину  $FF'(\psi)$  через давление  $p$  и продольный ток  $J$ :

$$FF'(\psi) = 4\pi^2 R^2 [J'(V) - \rho'(\psi)] \left\langle \frac{1}{h^2(1+\Omega^0)} \right\rangle^{-1}. \quad (4.55)$$

Подставляя это выражение в (4.34), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \frac{\nabla(\psi - \psi_0)}{R^2 h^2} = & -4\pi^2 \rho'(\psi) (1 + f_1) \left[ 1 - \frac{1}{h^2(1+\Omega^0)} \times \right. \\ & \left. \times \left\langle \frac{1}{h^2(1+\Omega^0)} \right\rangle^{-1} \right] - \frac{4\pi^2}{h^2(1+f_2)} J'(V) \left\langle \frac{1}{h^2(1+\Omega^0)} \right\rangle^{-1}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Для стелларатора с малым аспектным отношением ( $A^{-1} \gg B_h^2/B_0^2$ ) это



уравнение сводится к

$$\operatorname{div} \frac{\nabla(\Psi - \psi_v)}{R^2 h^2} = -4\pi^2 p'(\psi) \times \\ \times \left[ 1 - \frac{1}{h^2} \left\langle \frac{1}{h^2} \right\rangle^{-1} \right] - \frac{4\pi^2 J'(V)}{h^2} \left\langle \frac{1}{h^2} \right\rangle^{-1}. \quad (4.57)$$

Для стелларатора с большим аспектным отношением при токе не выше определяемого соотношением (4.53), т. е. при  $\mu_J/\mu \ll \beta/\beta_{\text{eq}}$ , уравнение (4.56) может быть записано как

$$\Delta(\Psi - \psi_v) = -4\pi^2 R^2 p'(\psi) [\Omega - \langle \Omega \rangle] + J'(V) \quad (4.58)$$

или аналогично уравнению Грина — Джонсона (4.42)

$$\Delta A = -2\pi R p'(\psi) [\Omega - \langle \Omega \rangle] - 2\pi R J'(V), \quad (4.59)$$

где  $\Omega$  и  $A$  — величины, определяемые (4.44).

Это уравнение, являющееся модификацией уравнения Грина — Джонсона, в котором в правой части явно выделен продольный ток, впервые было приведено в [103], а для бестоковой плазмы ( $J(\psi) = 0$ ), т. е. для стационарного равновесия [22], — в работе Страуса и Монтичелло [69].

Возвращаясь к потоковым координатам, приведем удобную для аналитического исследования с помощью метода моментов (см., например, [108]) запись уравнения равновесия (4.35) для стелларатора с большим аспектным отношением, поле которого является суперпозицией гармоник с разным шагом по  $\xi$  («невзаимодействующие» гармоники). Для такого стелларатора  $\psi_v = \psi_v(\rho)$ , поэтому один член в (4.35) выпадает и это уравнение принимает вид [66]

$$\frac{\partial}{\partial a} (\alpha_{22}^{\dagger} \psi') - \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha_{12}^{\dagger} \psi') = -4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle_{\xi} p'(\psi) - \\ - \frac{FF'(\psi)}{\alpha_{33}^{\dagger}} - FDR^{-2} \frac{\partial}{\partial \rho} [\mu_h(\rho) \rho^2], \quad (4.60)$$

где  $\mu_h$  — вакуумное вращательное преобразование стелларатора:

$$\mu_h(\rho) = -\dot{\psi}_v(\rho)/(2\pi\rho B_0). \quad (4.61)$$

Отметим во избежание путаницы, что нашему обозначению  $D$  соответствует  $\rho D$  в [66].

#### 4.5. Вывод скалярного двумерного уравнения равновесия из усредненных МГД-уравнений [42]

Система двумерных векторных уравнений для усредненных по  $\xi$  величин (знак усреднения опущен) [42]

$$\left. \begin{aligned} \nabla p &= [j\mathbf{B}] + [\mathbf{B} [\nabla \lambda]]; \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \operatorname{div} \mathbf{B}^* = 0, \quad \operatorname{rot} (\mathbf{B} - \mathbf{B}^*) = \mathbf{j}, \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

где  $\mathbf{B}^*$  — «эффективное» магнитное поле, создаваемое токами вин-

товых обмоток, а  $(\mathbf{B}-\mathbf{B}^*)$  — среднее по  $\zeta$  поле, порожденное другими токами, может быть также приведена к одному скалярному двумерному уравнению для функции  $\psi^0(r, \omega)$ . В первом уравнении (4.62), которое получено, как и (4.34), (4.35), методом разложения, последний член мал — порядка  $B^*/B_0$  по сравнению с  $|\mathbf{jB}|$ . Поэтому его можно отбросить, как это и делалось при вычислениях в [42] и других работах этих же авторов [44, 45], тогда уравнение равновесия примет обычный вид  $\nabla p = \mathbf{jB}$ . Именно таким уравнением и будем далее пользоваться.

Уравнения (4.62) являются по существу «токамачными», отличаясь от них лишь дополнительными членами. Так же, как и для токамака [108], векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}^*$  могут быть представлены в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi} [\nabla\psi^0\nabla\zeta] + \frac{1}{2\pi} \mathcal{F} \nabla\zeta; \quad (4.63)$$

$$\mathbf{B}^* = \frac{1}{2\pi} [\nabla\psi_v\nabla\zeta] + \frac{1}{2\pi} F_v \nabla\zeta. \quad (4.64)$$

Очевидно, условия  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и  $\text{div } \mathbf{B}^* = 0$  удовлетворяются тождественно. Сравнив (4.64) с выражениями для компонент вектора  $\mathbf{B}^*$  [42], определяем

$$\psi_v(r, \omega) = \frac{2\pi R^2}{B_0} \frac{h_s^3}{r} \left\langle \frac{\partial \varphi_h}{\partial r} \int \frac{\partial \varphi_h}{\partial \omega} d\zeta \right\rangle_{\zeta}; \quad (4.65)$$

$$F_v(r, \omega) = -\frac{2\pi R}{B_0} h_s^2 \langle (\nabla \varphi_h)^2 \rangle_{\zeta}. \quad (4.66)$$

Отметим, что (4.65) отличается от (4.30) лишь переменными: в (4.65)  $r, \omega$ , а в (4.30)  $\rho$  и  $u$ , связанные с  $(r, \omega)$  соотношениями (4.7).

Подставляя (4.63) и (4.64) в последнее уравнение (4.62), получаем выражение для вектора плотности тока:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2\pi} \left\{ [\nabla(\mathcal{F} - F_v), \nabla\zeta] - \frac{\nabla\zeta}{|\nabla\zeta|^2} \text{div} |\nabla\zeta|^2 \nabla(\psi^0 - \psi_v) \right\}. \quad (4.67)$$

Уравнение равновесия  $\nabla p = \mathbf{jB}$  с учетом (4.63) и (4.67) записывается в виде

$$\nabla p = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ -\nabla\psi^0 \text{div} |\nabla\zeta|^2 \nabla(\psi^0 - \psi_v) - |\nabla\zeta|^2 \mathcal{F} \nabla(\mathcal{F} - F_v) - \nabla\zeta (\nabla\zeta [\nabla\psi^0, \nabla(\mathcal{F} - F_v)]) \right\}. \quad (4.68)$$

Умножая (4.68) на  $\nabla\zeta$ , получаем первое следствие:

$$F \equiv \mathcal{F} - F_v = F(\psi^0). \quad (4.69)$$

Подставляя (4.69) в (4.68), получаем окончательно уравнение для  $\psi^0$

$$\text{div} \frac{\nabla(\psi^0 - \psi_v)}{R^2 h_s^2} = -4\pi^2 p'(\psi^0) - \frac{\mathcal{F} F'(\psi^0)}{R^2 h_s^2}. \quad (4.70)$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением (4.41), поскольку согласно (4.69) и (4.66)

$$\mathcal{F} = F(\psi^0) [1 - h_s^2 \langle (\nabla \varphi_h)^2 \rangle_{\zeta} / B_0^2]. \quad (4.71)$$

Как уже отмечалось, член  $\langle (\nabla \varphi_h)^2 \rangle_{\zeta} / B_0^2$  следует учитывать в уравнении равновесия лишь для стеллараторов с  $A_{\varepsilon h}^2 \geq 1$ . При этом, естественно, можно положить в (4.71)  $h_s = 1$ , тогда совпадение (4.70) с (4.41) будет полным.

#### 4.6. Об истинных параметрах разложения

Использование потоковых координат существенно упрощает описание равновесной конфигурации по сравнению с другими методами. Отсутствие у векторов  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$  составляющих по  $\nabla a$  позволяет легко разрешить уравнения Максвелла  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  и  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$  в общем виде [см. (4.5), (4.6)]. Осциллирующая по  $\zeta$  составляющая  $\mathbf{j}$ , определение которой является непростой задачей в обычных координатах [42], учитывается при этом автоматически. Уравнение равновесия  $\nabla p = [\mathbf{jB}]$  сводится к одному скалярному уравнению (4.3).

Сравнительная простота описания плазмы в потоковых координатах позволила нам отказаться от обычно используемого набора малых параметров (4.1) и рассмотреть задачу равновесия в более общей постановке. Как и в обычном стеллараторном приближении, величины  $\varepsilon_h$  и  $\beta$  мы с самого начала считали малыми. В ходе вычисления, чтобы избежать неоправданных усложнений, были введены еще два малых параметра —  $\mu l/m$  и  $\mu \alpha_{33}^{\zeta} / \alpha_{33}^{\zeta}$ , которые естественно возникают при упрощении уравнений равновесия. Рассмотрим каждый из этих четырех параметров в отдельности.

1. Основной параметр разложения — отношение амплитуды винтового поля к продольному  $\varepsilon_h = |\mathbf{V}_h| / B_0$ . Малость  $\varepsilon_h$  используется как при решении трехмерных, так и при упрощении двумерных уравнений. В трехмерных уравнениях, разлагая  $g_{ih} / \sqrt{g}$  по  $\delta/\rho$ ,  $\delta u'/\rho$ ,  $\lambda$  и  $\lambda u'$ , по существу следует требовать малости величины  $A_{\varepsilon h} / m$ , т. е. ограничения  $\varepsilon_h \ll m/A$ , которое тем слабее, чем больше  $m$ . В компактных системах число периодов винтового поля может быть не очень большим. При переходе к двумерным уравнениям малость  $\varepsilon_h$  позволяет представить величины  $\alpha_{ih}^{\zeta}$  в виде (4.29) и рассматривать  $f_1$  и  $f_2$  в  $\alpha_{33}^{\zeta}$  и в  $\langle \sqrt{g} \rangle_{\zeta}$  как малые поправки.

2. Вторым по важности является использование условия  $\beta \ll 1$ . Этот параметр нужен лишь в связи с вычислением  $\delta$  и  $\lambda$ , характеризующих чисто стеллараторные осциллирующие деформации магнитных поверхностей, и преобразованием в двумерном уравнении членов, сводящихся в конечном итоге к  $\text{div}(\nabla \psi_v / h^2)$ . Малость  $\beta$  позволяет рассчитывать входящие в скалярное двумерное уравнение функции  $\psi_v$  и  $\Omega^0$  (или  $f_1$  и  $f_2$ ) по вакуумному полю стелларатора, т. е. до решения задачи равновесия.

3. Параметр  $\mu l/m$ ; выше он использовался лишь при вычислении  $\delta$  и  $\lambda$ . Еще в первых теоретических работах по стеллараторам [1,

37] отмечалась важность условия  $\mu/m \ll 1$ . Впоследствии классическим стал набор малых параметров (4.1), а это условие практически перестало упоминаться. Связано это, возможно, с тем, что оно довольно слабое и заведомо выполняется в действующих установках.

Здесь этот параметр использован формально при упрощении уравнений для осциллирующих величин. Этим далеко не исчерпывается его роль. Малость  $\mu/m$ , как было показано Крускалом [1], гарантирует существование в асимптотическом смысле магнитных поверхностей, что и делает обоснованным использование уравнения  $\nabla \nabla \psi = 0$ . Эта проблема обычно остается за рамками обсуждения. Внимание к ней вновь было привлечено Лортцем и Нюренбергом [70, 149].

Отметим, что обычно, когда речь идет о допустимых значениях  $\mu$ , имеют в виду  $\mu_h$  — вакуумное вращательное преобразование. Мы же используем условие  $\mu l/m \ll 1$ , ограничивающее сверху суммарное равновесное вращательное преобразование. Это в принципе позволяет описать и стеллараторы с большим  $\mu_h$ , которое компенсируется токовым вращательным преобразованием обратного знака.

4. В ходе вычислений для величины  $\Phi' + \partial \eta / \partial \theta$ , входящей в двумерное уравнение равновесия (4.20), использовалось приближенное выражение (4.26), которое получается из (4.21) в пренебрежении членами порядка  $\mu \alpha_{23}^{\zeta} / \alpha_{33}^{\zeta}$ . В то же время в  $\alpha_{33}^{\zeta}$  в (4.26) сохранялись члены  $k\rho \cos u$  и  $f_2$ , что позволило учесть эффекты тороидального смещения из-за конечности давления и влияния магнитного бугра на равновесие. Естественно, при этом должно быть

$$| \mu \alpha_{23}^{\zeta} / \alpha_{33}^{\zeta} | \ll \max \{ \epsilon_h^2, k\rho \}. \quad (4.72)$$

Рассмотрим это условие (определяющее вид окончательного двумерного уравнения) подробнее. Используя для  $\psi_v$  оценку

$$\psi_v \sim 2\pi R^2 B_0 h^2 \epsilon_h^2 / m \quad (4.73)$$

и формулу (4.29) для  $\alpha_{23}^{\zeta}$ , определяем

$$\alpha_{23}^{\zeta} \sim R h^2 \epsilon_h^2 a / m \rho^2. \quad (4.74)$$

При этом принято, что  $(\partial \psi_v / \partial \rho) da / \partial \rho \sim \psi_v a / \rho^2$ . Оценивая величину  $\alpha_{33}^{\zeta}$ , можно с учетом равенства  $da / \partial \rho = \dot{u} / D$  считать, что  $\rho D \sim \sim \rho^2 / a$  и соответственно

$$\alpha_{33}^{\zeta} \sim R h a / \rho^2. \quad (4.75)$$

Таким образом,

$$\alpha_{23}^{\zeta} / \alpha_{33}^{\zeta} \sim \epsilon_h^2 h^2 / m \sim \epsilon_h^2 / m, \quad (4.76)$$

и условие (4.72) сводится к

$$\mu A \epsilon_h^2 / m \ll \max \{ A \epsilon_h^2, 1 \}. \quad (4.77)$$

При  $A \epsilon_h^2 \geq 1$  (обычное стеллараторное приближение) отсюда

следует ограничение на  $\mu$  [37]

$$\mu/m \ll 1. \quad (4.78)$$

При решении уравнений для осциллирующих по  $\xi$  величин мы пользовались немного более жестким условием  $l\mu/m \ll 1$ , так что (4.78) не дает ничего нового.

В стеллараторах с  $A\epsilon_h^2 \ll 1$  условие на  $\mu$  оказывается гораздо слабее, чем (4.78):

$$\mu/m \ll (A\epsilon_h^2)^{-1}. \quad (4.79)$$

При  $\epsilon_h \rightarrow 0$ , т. е. при переходе к аксиально-симметричным системам ограничение на  $\mu$  исчезает. Отметим, что рассмотренное выше (п. 3) ограничение  $\mu/m \ll 1$  определяет лишь точность вычисления  $\delta$  и  $\lambda$  и, следовательно, точность квадратичных по  $\epsilon_h$  стеллараторных членов в двумерном уравнении. Естественно, предельный переход  $\epsilon_h \rightarrow 0$ , когда члены порядка  $\epsilon_h^2$  становятся несущественными, делает ненужным это ограничение. Таким образом, наше приближение в отличие от обычного стеллараторного (4.1) допускает переход к аксиально-симметричным системам без ограничений на аспектное отношение и на вращательное преобразование.

Расширение области применимости стеллараторного приближения при снятии ограничений на аспектное отношение и (частично) на продольный ток позволяет более уверенно решать задачи равновесия, используя в качестве основы скалярное двумерное уравнение (4.34), обобщающее уравнение Грина — Джонсона, или его модификации.

## Глава 5. НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В СТЕЛЛАТОРАХ

### 5.1. Приближенное описание равновесия

Устойчивость плазмы, процессы переносов во многом зависят от формы и взаимного расположения магнитных поверхностей. Поэтому определение их искажений, вызванных полями токов, протекающих по плазме, является важной задачей теории равновесия.

Основной эффект конечности давления — смещение магнитных поверхностей друг относительно друга — возникает уже при малом давлении плазмы. С ростом давления меняется не только взаимное расположение поверхностей, но и их форма, так что их геометрия может сильно отличаться от исходной. При достижении некоторого критического давления происходит нарушение топологии магнитных поверхностей — образование сепаратрисы в рабочем объеме магнитных островов.

Внутренняя геометрия равновесной конфигурации в ряде случаев может быть описана с помощью нескольких параметров. Параметрическое задание магнитных поверхностей позволяет свести уравнения равновесия к более простым одномерным, определяющим

зависимость введенных параметров от маркирующей поверхности координаты  $a$ .

В простейшем случае достаточно ограничиться лишь учетом смещения магнитных поверхностей, а их форму при этом считать неизменной. При более точном описании следует учитывать и возникающую из-за конечности давления эллиптичность магнитных поверхностей. Часто более сложного описания и не требуется (см., например, [100, 108, 109]). В настоящем разделе рассмотрим такую двухпараметрическую модель, получим и обсудим уравнения для смещения и эллиптичности магнитных поверхностей.

**Общие уравнения.** При выводе одномерных уравнения для смещения  $\Delta$  и эллиптичности  $\alpha$  магнитных поверхностей обычно, следуя [24, 32], используют потоковую систему координат с выпрямленными силовыми линиями (ВСЛ), в которой полная система уравнений равновесия (4.3), (4.4) принимает вид (индекс  $s$ , которым раньше обозначалась принадлежность величин к системе с ВСЛ, здесь и далее опускаем):

$$\left. \begin{aligned} \rho' V' &= J' \psi' - F' \Phi'; \\ \nabla \nabla v &= \frac{\rho' V'}{2\pi \sqrt{g}} \left( 1 - \frac{4\pi^2 V \bar{g}}{V'} \right); \\ -v + \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= -\frac{g_{12}}{\sqrt{g}} \psi' + \frac{g_{13}}{\sqrt{g}} \Phi'; \\ J + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{g_{22}}{\sqrt{g}} \psi' + \frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \Phi'; \\ F + \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} &= -\frac{g_{23}}{\sqrt{g}} \psi' + \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \Phi'. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Коэффициенты связи (2.81) токов с потоками  $\alpha_{im}^0$  выражаются, как это следует из двух последних уравнений, через средние по  $\theta$  и  $\zeta$  метрических коэффициентов системы с ВСЛ:  $\alpha_{im}^0(a) = \langle g_{im} / \sqrt{g} \rangle_{\theta, \zeta}$ .

Эта система уравнений применялась, по-видимому, впервые в [24] при исследовании устойчивости в стеллараторных системах с круглым сечением магнитных поверхностей (пространственная ось, малая кривизна) и в системах с D-образной формой сечения (винтовая симметрия или обычный длиннопериодный стелларатор [32], разложение по степеням расстояния от магнитной оси). Координаты  $a$ ,  $\theta$ ,  $\zeta$  определялись методом возмущений. В качестве нулевого приближения в первом случае брались цилиндрические поверхности. В первом приближении по кривизне учитывалось их смещение. (Описание методов расчета равновесия, развитых в [24, 32], — см. ниже).

Для сведения уравнений равновесия к одномерным требуется явное задание формы магнитных поверхностей. Оно позволяет выразить через введенные параметры метрические коэффициенты. Мы пользуемся системой с ВСЛ, поэтому кроме физических парамет-

ров — смещения, эллиптичности и т. д. — требуется вводить еще и параметры выпрямления силовых линий. Уравнением для них служит (2.34). Вместо (2.34) обычно пользуются уравнением

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \alpha_{33}^{\pm} = 0, \quad (5.2)$$

которое для токамака является точным, а для стелларатора — приближенным, получающимся в пренебрежении членом  $\psi' g_{23} \sqrt{g}$  в последнем уравнении (5.1).

Геометрическое уравнение (5.2) легко решается без привлечения остальных четырех уравнений системы (5.1). Два последних из них позволяют (дифференцированием по  $\theta$  и  $a$  и вычитанием) исключить функцию  $\phi$  и сводятся к

$$J' + \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial a} (-\alpha_{22} \psi' + \alpha_{23} \Phi') - \frac{\partial}{\partial \theta} (-\alpha_{12} \psi' + \alpha_{13} \Phi'). \quad (5.3)$$

Задача равновесия сводится теперь к определению  $v$  из второго уравнения системы (5.1), параметров выпрямления из (5.2) и решению (5.3) с уже известной функцией  $v$ . Такая процедура будет использована в § 5.1 при рассмотрении трехмерных систем.

Для обычного стелларатора с  $\varepsilon_h \ll 1$  часть задачи равновесия уже решена в гл. 2 — найдено преобразование (4.7), сводящее уравнения равновесия к двумерным. На языке используемых сейчас уравнений это соответствует нахождению из них всех осциллирующих по  $\xi$  величин. Не повторяя этих вычислений, обратимся сразу к остающимся двумерным уравнениям, которые получаются усреднением по  $\xi$  (5.1) и (5.3).

Для систем, допускающих двумерное описание, в том числе и для обычных стеллараторов с  $\varepsilon_h \ll 1$ , достаточно универсально задать формы с помощью  $\Delta$  и  $\alpha$  соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \rho \cos u &= \rho_1 \cos \theta_1 + \Delta(a); \\ \rho \sin u &= \rho_1 \sin \theta_1, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

где (при почти круглых поверхностях)

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= a + \alpha(a) \cos 2\theta_1; \\ \theta_1 &= \theta + \lambda_1(a) \sin \theta + \lambda_2(a) \sin 2\theta; \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

$\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — параметры выпрямления силовых линий. В трехмерных системах смещение и эллиптичность зависят не только от  $a$ , но и от  $\xi$ , причем смещение имеет дополнительную составляющую по бинормали [24, 32]. В нашем подходе для стеллараторов с  $\varepsilon_h \ll 1$  эти эффекты трехмерности учитываются автоматически на первом шаге (4.7) перехода к потоковым координатам.

Параметрическое задание (5.4), (5.5) функций  $\rho$  и  $u$ , с которыми метрические коэффициенты  $\alpha_{ik}^{\pm}$  связаны соотношениями (3.62) и (4.29), использовано в § 5.2 при описании двух типов стеллараторов — с винтовой и с плоской осью. Как обычно, будем считать,

что  $|\Delta'|$ ,  $|\alpha|$ ,  $|\lambda_1|$  и  $|\lambda_2|$  малы по сравнению с единицей, и вычислять  $\alpha_{ik}^{\xi}$  разложением по этим величинам. При этом  $\alpha_{ik}^{\xi}$  представляются в виде рядов Фурье по  $\cos n\theta$  или по  $\sin n\theta$  с коэффициентами, порядок малости которых растет с  $n$ . Для вывода уравнений для смещения  $\Delta$  и эллиптичности  $\alpha$  достаточно сохранить члены лишь с  $n=0, 1, 2$ . Формулы, необходимые для вычисления в таком приближении коэффициентов  $\alpha_{ik}^{\xi}$ , приведены в приложении 3. Там же даны и явные, через  $\Delta$  и  $\alpha$ , выражения для неизвестных функций  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , которые определяются из (5.2).

Отметим в заключение, что рассмотренные ранее двумерные уравнения (3.8), (4.34) или (3.65), (4.35) эквивалентны уравнению

$$4\pi^2 \langle \sqrt{g} \rangle_{\xi} p'(\psi) = \frac{\partial}{\partial a} (-\alpha_{22}^{\xi} \psi' + \alpha_{23}^{\xi} \Phi') - \\ - \frac{\partial}{\partial \theta} (-\alpha_{12}^{\xi} \psi' + \alpha_{13}^{\xi} \Phi') - F'(\psi) \Phi', \quad (5.6)$$

которое получается объединением двух первых уравнений системы (5.1) с учетом (5.3) и усреднением по  $\xi$ . Напомним, что для перехода к (3.65) и (4.35) от уравнений равновесия (3.8) и (4.34) в инвариантной формулировке достаточно преобразовать лишь дифференциальные операторы в их левой части. В разд. 3.4 расписано в потоковых координатах выражение  $\text{div}[\nabla\psi(\rho, u)/(h_s^2 + \kappa^2 \rho^2)]$ , входящее в уравнения равновесия систем с винтовой и аксиальной ( $\kappa=0$ ,  $\alpha_{13}=\alpha_{23}=0$ ) симметрией. Точно так же, как и для аксиально-симметричной конфигурации, при переходе  $(\rho, u) \rightarrow (a, \theta)$  преобразуется и  $\text{div}(\nabla\psi/h^2)$  в двумерном уравнении равновесия плазмы в обычном стеллараторе.

**Примеры аналитического решения трехмерных уравнений.** Рассмотрим конфигурацию, магнитная ось которой представляет собой пространственную кривую с заданными кривизной  $k(s)$  и кручением  $\kappa(s)$ ,  $s$  — длина дуги оси. Пусть  $x, y$  — координаты, отсчитываемые в направлении нормали  $\mathbf{n}$  и бинормали  $\beta$  к магнитной оси. Обозначим  $\mathbf{r}_0(s)$  радиус-вектор положения точки на магнитной оси. Тогда радиус-вектор произвольной точки

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(s) + \kappa \mathbf{n} + y \beta. \quad (5.7)$$

Используя формулы Серре—Френе, нетрудно найти квадрат элемента длины [9]

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + 2\kappa(x dy - y dx) ds + \\ + R^2 [(1 - \kappa x)^2 + \kappa^2(x^2 + y^2)] d\xi^2, \quad (5.8)$$

где  $\xi = s/R$ ;  $R \equiv L/2\pi$ ;  $L$  — полная длина оси.

Запишем уравнение искомым магнитных поверхностей в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho(a, \theta, \xi) \cos \gamma + \xi(a, \xi); \\ y &= \rho(a, \theta, \xi) \sin \gamma + \eta(a, \xi) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$



И ПОЛОЖИМ

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \gamma_1; & \gamma_0 &= \theta + h(\xi); \\ \gamma_1 &= \lambda_1(a, \theta, \zeta) \sin \gamma_0 + \lambda_2(a, \theta, \zeta) \cos \gamma_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Эллиптическая деформация магнитных поверхностей оказывается, как следует из уравнений равновесия, порядка  $k^2 a^2$ , поэтому при разложении по  $ka$ , которым будем пользоваться далее, ее можно не учитывать [24]. Полагая  $\rho = a$  и подставляя выражения (5.9) и (5.10) в (5.8), находим метрические коэффициенты координат ВСЛ:

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= 1 + 2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial a} \cos \gamma_0 + \frac{\partial \eta}{\partial a} \sin \gamma_0 \right); \\ g_{12} &= a^2 \left( \frac{\partial \lambda_1}{\partial a} \sin \gamma_0 + \frac{\partial \lambda_2}{\partial a} \cos \gamma_0 \right) - a \left( \frac{\partial \xi}{\partial a} \sin \gamma_0 - \frac{\partial \eta}{\partial a} \cos \gamma_0 \right); \\ g_{22} &= a^2 [1 + 2(\lambda_1 \cos \gamma_0 - \lambda_2 \sin \gamma_0)]; \\ g_{23} &= a^2 \left( \frac{dh}{d\zeta} + \kappa R \right) (1 + \lambda_1 \cos \gamma_0 - \lambda_2 \sin \gamma_0) + \\ &+ a^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\lambda_1 \sin \gamma_0 + \lambda_2 \cos \gamma_0) + a \left( \frac{\partial \eta}{\partial \zeta} + \kappa R \xi \right) \cos \gamma_0 - \\ &- a \left( \frac{\partial \xi}{\partial \zeta} - \kappa R \eta \right) \sin \gamma_0; \\ g_{33} &= R^2 (1 - 2ka \cos \gamma_0); \\ \sqrt{g} &= aR \left[ 1 - \left( ka - \lambda_1 - \frac{\partial \xi}{\partial a} \right) \cos \gamma_0 - \left( \lambda_2 - \frac{\partial \eta}{\partial a} \right) \sin \gamma_0 \right]. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Приравнивая в двух последних уравнениях (5.1) члены с одинаковой зависимостью от  $\gamma_0$  и сохраняя лишь основные члены, находим:

$$h = \int_0^{\xi} (\kappa_0 - \kappa) d\zeta, \quad (5.12)$$

$$\text{где } \kappa_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \kappa d\zeta;$$

$$\lambda_1 = -ka - \partial \xi / \partial a, \quad \lambda_2 = \partial \eta / \partial a. \quad (5.13)$$

Для определения величины  $v$  произведем разложение комплексной кривизны

$$K(\zeta) = k(\zeta) \exp(i h(\xi)) \quad (5.14)$$

в ряд Фурье:

$$K(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n \exp(in\zeta). \quad (5.15)$$

Полагая далее

$$\left. \begin{aligned} v &= \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \exp [i (\theta + n\zeta)]; \\ \xi_p &= \xi \cos \gamma_0 + \eta \sin \gamma_0 = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n \exp [i (\theta + n\zeta)], \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

находим из второго уравнения (5.1)

$$v_n = -i \frac{8\pi^2 \rho' (a) R}{\Phi'} \frac{k_n a^2}{\mu + n}, \quad (5.17)$$

где  $\mu = q^{-1} = -\psi'/\Phi'$ , а из (5.3) получаем уравнение для фурье-коэффициентов смещения  $\xi_n$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \frac{d}{da} \left[ a^3 (\mu + n)^2 \frac{d\xi_n}{da} \right] &= k_n a^2 \left[ (\mu + n) (\mu - 3n + 4\kappa_0 R) - \right. \\ &\quad \left. - 8\pi^2 \rho' \frac{aR^2}{\Phi'^2} \right]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Это уравнение без использования координат ВСЛ получено в [9, с. 120]. Оно легко интегрируется в общем виде (формула (11.143) в [9]).

В методе разложения по степеням расстояния  $\rho$  от магнитной оси за нулевое приближение принимается система магнитных поверхностей, сечения которых — подобные эллипсы, прокручивающиеся при движении вдоль оси [32]:

$$\psi_0 = \frac{B_0(s)}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} (1 + \varepsilon \cos 2u) \rho^2. \quad (5.19)$$

Здесь  $u = \theta + \delta(s)$ ;  $\theta$  — угол, отсчитываемый от главной нормали в плоскости  $x, y$ ;  $\delta(s) = 2\pi ns/L + \bar{\delta}(s)$ . Координаты  $x = \rho \cos u$ ,  $y = \rho \sin u$  прокручиваются вместе с эллипсами, так что

$$\begin{aligned} d\bar{l}^2 &= dx^2 + dy^2 + 2[\delta'(s) - \kappa(s)] ds (ydx - xdy) + \\ &+ [(\delta' - \kappa)^2 \rho^2 + (1 - k\rho \cos \theta)^2] ds^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Полагая  $\varepsilon = \operatorname{th} \eta$ , получаем  $\psi_0$  в виде

$$\psi_0 = B_0(s) [x^2 \exp \eta + y^2 \exp (-\eta)]. \quad (5.21)$$

Теперь мы перейдем к «скругленным» координатам  $\rho_0, \omega$ , полагая  $x = B_0^{-1/2} \exp(-\eta/2) \rho_0 \cos \omega$ ,  $y = B_0^{-1/2} \exp(\eta/2) \rho_0 \sin \omega$ , так что  $\psi_0 = \rho_0^2$ . В дальнейшем ограничимся случаем однородного магнитного поля  $B_0(s) = \operatorname{const}$ . Кроме того, будем считать, что колебания фазы  $\delta(s)$  относительно прямой  $2\pi ns/L$  в точности компенсируют колебания  $\int \kappa ds$  относительно прямой  $\kappa_0 s$ , т. е.  $\delta'(s) = \kappa - \kappa_0$ . В этом случае метрические коэффициенты скругленной системы

координат  $x_0^1 = \rho_0$ ,  $x_0^2 = \omega$ ,  $x_0^3 = s/R_0 = \zeta$  определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} g_{11}^0 &= \operatorname{ch} \eta - \operatorname{sh} \eta \cos 2\omega; \\ g_{12}^0 &= g_{21}^0 = a \operatorname{sh} \eta \sin 2\omega; \\ g_{13}^0 &= g_{31}^0 = 0; \\ g_{22}^0 &= a^2 (\operatorname{ch} \eta + \operatorname{sh} \eta \cos 2\omega); \\ g_{23}^0 &= g_{32}^0 = a^2 (\kappa - \delta') R = a^2 \kappa_0 R; \\ g_{33}^0 &= R^2; \quad g^0 = \det g_{ik}^0 = a^2 R^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Нетрудно убедиться, что эта метрика удовлетворяет уравнениям (5.1) с  $\theta_s = \omega$ , т. е. соответствует координатам ВСЛ.

В следующем приближении разложения по степеням расстояния от оси учтем возможное искажение формы магнитных поверхностей (появление «треугольности»), положив

$$\rho_0^2 = a - (\alpha \cos \omega + \beta \sin \omega) a^2. \quad (5.23)$$

Одновременно следует учесть смещение «геометрического центра»  $\rho_0 = 0$  поверхностей относительно магнитной оси:

$$\left. \begin{aligned} x &= \exp(-\eta/2) \rho_0 \cos \omega + a^2 \xi_1(\zeta); \\ y &= \exp(\eta/2) \rho_0 \sin \omega + a^2 \xi_2(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Чтобы и в этом приближении сохранилось условие ВСЛ, нужно ввести преобразование угловой переменной  $\omega$ :

$$\omega = \theta_s + a (\lambda_1 \sin \theta_s + \mu_1 \cos \theta_s + \lambda_3 \sin 3\theta_s + \mu_3 \cos 3\theta_s). \quad (5.25)$$

Рассчитывая метрические коэффициенты системы координат  $a$ ,  $\theta_s$ ,  $\zeta$  и подставляя их в систему уравнений ВСЛ (5.1), получим, приравняв коэффициенты перед одинаковыми тригонометрическими функциями в левой и правой частях уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -(2\xi_1 + \exp(-\eta/2) k \cos \delta); \\ \mu_1 &= 2\xi_2 + \exp(-\eta/2) k \sin \delta; \\ \lambda_3 &= \alpha; \quad \lambda_4 = -\beta. \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

После нахождения  $\nu$  и  $\varphi$  получаем всю информацию о равновесии в рассмотренном приближении.

Не останавливаясь на деталях вычислений, обсудим одномерные уравнения для смещения и эллиптичности, которые получаются из двумерных уравнений (5.2) и (5.6) для стеллараторов различных типов.

**Стелларатор с винтовой геометрической осью.** В системе с винтовой симметрией без продольного тока смещение круглых магнитных поверхностей радиусом  $a$  описывается уравнением [78, 24]

$$a\Delta'' + 3\Delta' + 3ka = -(2kj\kappa^2) p'/B_0^2, \quad (5.27)$$

содержащемся в (5.18) как частный случай. Здесь  $k = \text{const}$  и  $\kappa = \text{const}$  — кривизна и кручение геометрической оси соответственно. При выводе этого уравнения предполагалась малость по сравнению с единицей параметров  $ka$ ,  $\kappa a$  и  $\Delta'$ . Здесь  $\Delta < 0$  соответствует смещению шнура наружу от центра кривизны, а  $\Delta > 0$  внутрь.

В силу линейности уравнений (5.27) смещение  $\Delta$  можно представить в виде суммы  $\Delta_v + \Delta_p$  вакуумного смещения, удовлетворяющего уравнению

$$a\Delta_v'' + 3\Delta_v' + 3ka = 0, \quad (5.28)$$

и смещения  $\Delta_p$ , вызванного давлением плазмы:

$$a\Delta_p'' + 3\Delta_p' = -(2k/\kappa^2)p'/B_0^2. \quad (5.29)$$

Решение уравнения (5.28)

$$\Delta_v = \Delta_{ax} - (3/8)ka^2 \quad (5.30)$$

показывает, что центр магнитной поверхности  $a = \text{const}$  смещен относительно вакуумной магнитной оси  $a = 0$  наружу от центра кривизны оси (на расстояние  $(3/8)ka^2$ ), т. е. в область более слабого поля. Магнитная ось при этом находится в области более сильного поля, система обладает магнитным бугром [9, с. 150]:

$$V_0''(\Phi) \Phi / V_0'(\Phi) = k^2 a^2. \quad (5.31)$$

По этой причине первые стеллараторы с пространственной осью были забракованы, как не удовлетворяющие условию устойчивости относительно конвективных возмущений [2, 36]. Позже было показано [63, 64], что такие конфигурации, неустойчивые при малом давлении плазмы, могут стать устойчивыми при большем давлении, когда существенными становятся деформации магнитных поверхностей, связанные с давлением плазмы.

Давление плазмы, при котором поверхности заметно искажаются, можно оценить, пользуясь линейным уравнением (5.29). Умножая его на  $a^2$  и интегрируя по  $a$ , получаем

$$a\Delta_p' = -[2k/(\kappa^2 B_0^2)] [p(a) - \bar{p}(a)], \quad (5.32)$$

где  $\bar{p}(a)$  — среднее по сечению давление:

$$\bar{p} = (2/a^2) \int_0^a p(a) a da. \quad (5.33)$$

Величина  $\Delta_p'$  становится большой, т. е. искажения магнитных поверхностей уже нельзя считать малыми при значениях  $\beta$ , близких к пределу (1.25):  $\beta_{\text{eq}} = \kappa^2 b/k$ . Это выражение может служить оценкой предельного по равновесию давления плазмы в бестоковом стеллараторе с винтовой осью с круглыми магнитными поверхностями. Для токамака оценка предельного по равновесию давления имеет, как известно, вид

$$\beta_{\text{eq}} = b/(Rq^2) = \mu^2 b/R = (\mu/R)^2 b/k. \quad (5.34)$$

Оценка (1.25) для стелларатора, соответствующая смещению магнитной оси на половину радиуса плазменного шнура при параболическом профиле давления плазмы  $p = p_0(1 - a^2/b^2)$ , в точности совпадает с последним выражением (5.34) для токамака. Напомним, что в бестоковой системе с винтовой осью (см. (1.20))

$$\mu = \mu_{\kappa} = -\kappa R. \quad (5.35)$$

Уравнение (5.27) для смещения справедливо лишь при  $\beta \ll \beta_{\text{eq}}$ . При больших давлениях смещение описывается более сложным нелинейным уравнением [64]:

$$\Delta'' + \frac{3\Delta'}{a} + \frac{2\mu'}{\mu} \Delta' - \frac{4R\kappa k}{\mu} = k \left[ 1 - \frac{8\pi^2 R a p'}{\chi'^2} \left( 1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha}{a} + \frac{3}{2} \alpha' - \frac{9}{4} \Delta'^2 \right) \right] + \frac{3\Delta'}{a} \left( \frac{\alpha}{a} - \alpha' + \frac{3}{2} \Delta'^2 \right). \quad (5.36)$$

Здесь  $\chi$  — винтовой полоидальный поток, отсчитываемый от магнитной оси;  $\alpha$  — эллиптичность магнитных поверхностей, удовлетворяющая уравнению [64, 150]

$$\begin{aligned} \alpha'' + \frac{3\alpha'}{a} - \frac{3\alpha}{a^2} = \\ = - \frac{12\pi^2 R^2 \kappa a p'}{\chi'^2} \Delta' - \frac{3}{2} \Delta'^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{\chi''}{\chi'} \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

В этих уравнениях в отличие от (5.27) учтен и продольный ток  $J$ : вращательное преобразование  $\mu$  складывается из токового  $\mu_J = RJ/a\Phi'$  и чисто стеллараторного  $\mu_{\kappa} = -\kappa R$ :

$$\mu = (RJ/(a\Phi') - \kappa R) (1 - \Delta'^2/2), \quad (5.38)$$

геометрический множитель  $1 - \Delta'^2/2$  описывает влияние на  $\mu$  неконцентричности магнитных поверхностей. При  $\mu_J = 0$  уравнения (5.36) и (5.37) описывают стелларатор с однородным полем с осью в виде винтовой линии, при  $\kappa = 0$  — токамак. Нелинейные уравнения для смещения и эллиптичности магнитных поверхностей используются обычно при аналитическом исследовании устойчивости плазмы высокого давления.

Линейное уравнение для смещения при наличии продольного тока (5.18) для стелларатора с винтовой осью может быть записано в виде

$$(a^3 \mu^2 \Delta')' = k a^3 [\mu (\mu + 4\kappa R) - 8\pi^2 p' R^2 / \Phi'^2], \quad (5.39)$$

где  $\mu$  определяется формулой (5.38);  $\Delta'^2 \ll 1$ . В качестве простейшего примера использования этого уравнения рассмотрим случай  $\mu_J = \text{const}$ , а профиль  $p(a)$  — параболический:

$$p = p_0 (1 - a^2/b^2). \quad (5.40)$$

В этом случае

$$\Delta_p = \Delta_0 + \beta \frac{k R^2}{2\mu^2} \frac{a^2}{b^2}, \quad (5.41)$$

где  $\beta = 2p/B_0^2$ . Полагая  $\Delta_p(b) = 0$  (крайняя поверхность несмещена), определяем смещение магнитной оси

$$\Delta_0 = -\beta k R^2 / (2\mu^2). \quad (5.42)$$

Ось смещена наружу от центра кривизны, в область более слабого поля. Вращательное преобразование  $\mu = \mu_k + \mu_J$  зависит от направления тока омического нагрева  $J$ . Следствием этого является сильная зависимость магнитной конфигурации стелларатора от направления тока. Из (5.42) видно, что для рассмотренного случая  $\mu^2 \Delta_0 = \text{const} \cdot \beta$ , поэтому при одинаковых  $\beta$  и при  $\mu_J = 0,5\mu_k$

$$\left( \frac{\mu_k + \mu_J}{\mu_k - \mu_J} \right)^2 = \frac{\Delta_0^-}{\Delta_0^+} = 9, \quad (5.43)$$

т. е. изменение направления тока приводит к 9-кратному увеличению смещения оси.

Стелларатор с пространственной осью при  $J=0$  — это практически бесшировая система,  $\mu = \text{const}$ , слабая зависимость  $\mu$  от радиуса появляется лишь при большом давлении плазмы. Именно вследствие бесшировости вакуумной конфигурации такого стелларатора уравнение для смещения содержит лишь производные  $\Delta''$  и  $\Delta'$ , а сама величина  $\Delta$  в уравнение не входит (нет выделенного центра). Рассмотрим более сложный случай стелларатора с широм.

**Стелларатор с винтовыми полями.** На начальном этапе экспериментальных исследований для создания вращательного преобразования использовалось простейшее средство — закручивание геометрической оси стелларатора (первый стелларатор — восьмерка Спитцера [1, 2]). После того как теоретически было показано [36], что для устойчивости плазмы в стеллараторе необходим шир (отсутствующий в стеллараторе с пространственной осью) и был указан практический способ создания в стеллараторе вращательного преобразования, зависящего от радиуса, — использование винтовых полей — произошел переход к стеллараторам с плоской осью с винтовыми проводниками [2].

Стеллараторы с широм принципиально отличаются от бесшировых тем, что имеют выделенную ось — ось, на которой вакуумное вращательное преобразование минимально. Формально наличие такой оси проявляется в том, что смещение магнитных поверхностей равновесной конфигурации описывается более сложным, чем (5.27), уравнением (1.44), содержащим, кроме производных, и само смещение. Это приводит к двум важным следствиям, которые мы обсуждали в разд. 1.4, — своеобразной упругости магнитных поверхностей и наличию критического давления.

Линейное уравнение (1.44) пригодно для описания лишь внешней части плазменного шнура в стеллараторах с широм. В качестве множителя при  $\Delta''$  и знаменателя в правой части оно содержит (при  $\mu_J = 0$ ) функцию  $\mu_h(a)$  — вакуумное вращательное преобразование, которая может обращаться в нуль на оси (в трехзаходном стеллараторе, например, вблизи оси  $\mu_h = \mu_2 a^2$ ,  $\mu_2 = \text{const}$ ). Непри-

годность (1.44) для описания всего шнура видна в этом случае уже на примере решения (1.45) однородного уравнения (1.44).

Уравнение, позволяющее описать весь плазменный шнур полностью, включая магнитную ось, было получено (без разложения по  $\Delta/a$  [40—43, 65], пригодного лишь для периферии) в [67]. Это уравнение даже при небольшом давлении плазмы в стеллараторах с широм становится нелинейным. Нелинейность возникает вследствие сильной зависимости вращательного преобразования  $\mu(a)$  от смещения, которая не учитывалась при выводе (1.44). Для стелларатора, вакуумное поле которого имеет вращательное преобразование

$$\mu_{st} = \mu_0 + \mu_2 \rho^2 + \mu_4 \rho^4, \quad (5.44)$$

эта зависимость такова [67]:

$$\begin{aligned} \mu(a) = \mu_0 \left(1 - \Delta'^2/2\right) + \mu_2 \left(a^2 + 2\Delta^2 - \frac{1}{2} a^2 \Delta'^2\right) + \mu_4 \left(a^4 + 6a^2 \Delta^2 + \right. \\ \left. + 3\Delta^4 - a^4 \Delta'^2/2\right) + (RJ/\alpha\Phi') \left(1 - \Delta'^2/2\right). \end{aligned} \quad (5.45)$$

Эта формула применима как к обычным стеллараторам с круговой осью, так и к стеллараторам с винтовой осью ( $\mu_0 = -\kappa R$ ,  $\mu_2 = \mu_4 = 0$ ), к комбинированным стеллараторам [151] ( $\mu_{st} = \mu_{st}' + \mu_h$ ) и к токамакам ( $\mu_h = 0$ ,  $\mu_J \neq 0$ ). Она может быть переписана в виде

$$\mu(a) = [\mu_{st}(a) + \mu_J(a)] \left(1 - \Delta'^2/2\right) + \Delta^2 [2\mu_2 + 3\mu_4 (2a^2 + \Delta^2)]. \quad (5.46)$$

Здесь геометрический множитель  $(1 - \Delta'^2/2)$  в первом слагаемом описывает уменьшение вращательного преобразования на периферии шнура (на оси  $\Delta' = 0$  величина  $|\Delta'|$  растет к краю). Второе неотрицательное слагаемое, максимальное на магнитной оси, описывает увеличение вращательного преобразования в центральной части плазменного шнура при смещении магнитных поверхностей. Отметим, что изменение  $\mu(a)$  зависит лишь от модуля смещения, но не от его знака.

Простейшее уравнение для смещения в стеллараторе с  $\mu_{st}(\rho) = \mu_0 + \mu_2 \rho^2$ , позволяющее описать как двухзаходные стеллараторы, в том числе и с большим широм, так и трехзаходные,

$$\Delta'' + \frac{(a^3 \mu_2)'}{a^2 \mu^2} \Delta' + \frac{8\mu_2}{\mu} \Delta = - \frac{2\rho'R}{a\mu^2 B_0^2} \left( kR - \frac{1}{2} B_0^2 V_{0\infty}^2(\Phi) \Delta \right) \quad (5.47)$$

отличается от (1.44) лишь тем, что при выводе (5.47) учтено отличие  $\mu(a)$  от  $\mu_{st}(a)$ . Как и (1.44), это уравнение, полученное как частный случай более общих нелинейных уравнений для смещения и эллиптичности [67], применимо лишь при  $|\Delta'| \ll 1$ , но в отличие от (1.44) для всего плазменного шнура, включая магнитную ось.

Нелинейные уравнения для смещения  $\Delta$  и эллиптичности  $a$  в стеллараторе с  $\mu_{st} = \mu_0 + \mu_2 \rho^2$ , аналогичные уравнениям (5.36) и

(5.37) для случая  $\mu_{st} = -\chi R = \text{const}$ , имеют вид [67]

$$\Delta' + \frac{(a^3\mu^2)}{a^3\mu^2} \Delta' + \frac{8\mu_2}{\mu} \Delta = -\frac{2p'kR^2}{a\mu^2B_0^2} \left( 1 + \frac{3\alpha}{2a} + \frac{3}{2}\alpha' - \frac{9}{4}\Delta'^2 \right) +$$

$$+ \frac{3\Delta'}{a} \left[ \frac{\alpha}{a} + \frac{\Delta'^2}{4} + \frac{\alpha\chi''}{\chi'} \left( \frac{5}{4}\Delta'^2 - \alpha' \right) \right] + \frac{p'R}{a\mu^2} V_{0\infty}'(\Phi) \Delta -$$

$$- \frac{4\mu_2}{\mu} \left[ \frac{3}{a} (\alpha\Delta)' - \frac{9}{2} \Delta\Delta' \right]; \quad (5.48)$$

$$\alpha'' + \frac{(a^3\mu^2)'}{a^3\mu^2} \alpha' - \frac{3\alpha}{a^2} + \frac{8\mu_2}{\mu} \alpha =$$

$$= -\frac{3p'kR^2}{a\mu^2B_0^2} \Delta' - \frac{3}{2} \Delta'^2 \left( \frac{1}{a} + \frac{\chi''}{\chi'} \right) - \frac{12\mu_2}{\mu} \Delta\Delta'. \quad (5.49)$$

Здесь  $\chi' = 2\pi a B_0 \mu(a)$ ;  $\chi$  — полоидальный магнитный поток, отсчитываемый от магнитной оси. Подобные уравнения, полученные в [45] для внешней области плазменного шнура (разложением по  $\Delta/a$ ), использовались при исследовании устойчивости плазмы по отношению к желобковым и баллонным возмущениям [45] и при изучении влияния на равновесие магнитного бугра [48].

Нелинейные уравнения (5.48) и (5.49) и аналогичные более сложные уравнения [67] для случая  $\mu_{st} = \mu_0 + \mu_2\rho^2 + \mu_4\rho^4 + \mu_6\rho^6$ , позволяющего учесть четвертую и пятую гармоники винтового поля, хотя и позволяют описать плазму более высокого давления, чем уравнение (5.47), обладают все же ограниченной областью применимости. Расчеты показывают (см., например, [72, 101]), что при высоких, но еще далеких от предельного давлениях магнитные поверхности могут так деформироваться, что для их описания уже явно недостаточно двух параметров — смещения и эллиптичности (рис. 14, 21). Введение треугольности, четырехугольности и т. д. сильно осложняет аналитическое описание, поэтому многопараметрические модели используются лишь в численных кодах [107, 152, 153].

## 5.2. Эволюция равновесия плазмы в стеллараторах

Рассмотрим в рамках метода заданного давления [138, 140] эффекты, сопровождающие повышение давления плазмы или изменение его профиля. Необходимость такого рассмотрения диктуется широким использованием мощных источников нагрева, способных за короткое (много меньше скин-слоевого) время существенно повысить давление плазмы.

**Равновесие плазмы в стеллараторе при быстром повышении давления.** Возможность получения в стеллараторе больших  $\beta$  связывается обычно с благоприятной для устойчивости плазмы зависимостью от радиуса угла вращательного преобразования [20, 42—46, 50, 69, 75] и с возможностью работы стелларатора в бестоковом режиме [1, 2, 17—19]. Вращательное преобразование  $\mu = -\psi'/\Phi'$ ,



как это следует из общих формул (2.81), складывается в стеллараторе из двух частей — «токамачной», пропорциональной продольному току, и чисто стеллараторной, определяющейся только формой магнитных поверхностей (2.177):

$$\mu(a) = J/(\alpha_{22}^0 \Phi') - \alpha_{23}^0/\alpha_{22}^0.$$

Здесь  $\alpha_{ik}^0 = \langle g_{ik}/\sqrt{g} \rangle_{\theta, \zeta}$  в системе координат с ВСЛ.

Уже из простейших уравнений для смещения (5.47) и эллиптичности (5.49) видно, что рост давления плазмы или изменение его профиля, включение дополнительных внешних полей (например, поперечного для коррекции положения плазменного шнура) могут приводить к существенным изменениям внутренней геометрии. Это, в свою очередь, приводит к сильному изменению геометрической (не зависящей явно от тока  $J$ ) части вращательного преобразования, так что в конечном итоге профиль  $\mu(a)$  может стать даже немонотонным [50, 101], что неблагоприятно для устойчивости. Общая тенденция изменения профиля  $\mu$  в бестоковом стеллараторе при смещении магнитных поверхностей видна из (5.46): на периферии плазменного шнура вращательное преобразование уменьшается, а в центре возрастает при  $\mu'_{st}(\rho) > 0$  или сохраняет прежнее значение при  $\mu'_{st}(\rho) = 0$  [67]. Здесь по-прежнему символом  $\mu_{st}$  обозначено вакуумное вращательное преобразование в отсутствие сдвигающих магнитных поверхности поперечных полей.

Основой для анализа временной эволюции профиля  $\mu(a)$  может служить уравнение (2.114) или эквивалентное ему (2.116). По порядку правая часть (2.116) может быть оценена как  $4\mu_J/\tau_{sk}$ , где  $\tau_{sk} = \sigma_{\parallel} b^2$  — скиновое время, которое, таким образом, является характерным временем изменения  $\mu$ . Если же разогрев плазмы производится быстро, за время  $\tau_h \ll \tau_{sk}$ , то профиль  $\mu(\Phi)$ , как следует из этого уравнения, должен остаться неизменным. Это возможно при изменении геометрических величин  $\alpha_{ik}^0$  в (2.117) лишь за счет генерации продольного тока

$$J = \alpha_{22}^0 \Phi' (\mu(a) + \alpha_{23}^0/\alpha_{22}^0), \quad (5.50)$$

где  $\alpha_{ik}^0$  — величины, соответствующие конечному (после нагрева) равновесному состоянию. Используя величины  $\alpha_{ik}^{\zeta}$  (4.29), характеризующие произвольную (не обязательно с ВСЛ) потоковую систему координат, выражение для возникающего при быстром нагреве плазмы продольного тока можно записать в виде

$$J = \Phi'_{\parallel} [\mu \alpha_{22}^{\theta \zeta} + \langle \alpha_{23}^{\zeta}/\alpha_{33}^{\zeta} \rangle_{\theta} / \langle 1/\alpha_{33}^{\zeta} \rangle_{\theta}]. \quad (5.51)$$

Индексом  $\theta$  здесь обозначено усреднение по  $\theta$ . Эта формула получается из двух последних уравнений (4.21), где членом  $\alpha_{23}\psi'$  мы пренебрегли. Напомним, что в (4.21)  $\eta = \eta(a, \theta)$ , что обеспечивается выбором  $\lambda$  на первом шаге (4.7) перехода к потоковым координатам. В системе координат с ВСЛ  $\sigma_{33}^{\zeta}$  не зависит от  $\theta$ , в этом случае (5.51) сводится к (5.50).

Для стелларатора, вакуумные магнитные поверхности которого в среднем круглые и концентричные,  $\psi_v = \psi_v(\rho)$ , величина  $\alpha_{23}^{\zeta}$  выражается с помощью (4.29) и (4.61) непосредственно через вакуумное вращательное преобразование  $\mu_{st}(\rho)$  (эта формула пригодна и для стеллараторов с винтовой осью):

$$\alpha_{23}^{\zeta} = -(\rho \dot{u}/RD) \mu_{st}(\rho). \quad (5.52)$$

Если в начальном состоянии давление плазмы мало, то  $\mu(a)$  после быстрого подъема давления просто совпадает с  $\mu_{st}(a)$ . В этом случае формула (5.50) принимает вид

$$J = \Phi' \left\{ \mu(a) \left\langle \frac{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{u}^2}{\rho DR} \right\rangle_{\theta} - \frac{\langle \rho^2 \dot{u} \mu_{st}(\rho) \rangle_{\theta}}{R \langle \rho D \rangle_{\theta}} \right\}. \quad (5.53)$$

Входящие сюда геометрические величины вычислены в приложении 3 для модели (5.4) слабоэллиптических (при конечном давлении плазмы) магнитных поверхностей. Используя эти выражения и разложение (5.44)  $\mu_{st}(\rho)$  по степеням  $\rho^2$ , легко привести (5.53) к виду (5.45), где в правой части мы должны положить  $\mu(a) = \mu_{st}(a)$ . Получаем, таким образом, явную связь тока, возникшего в плазме при быстром ее нагреве, со смещением магнитных поверхностей [67]:

$$J = \frac{2\pi a^2 B_0}{R} \left[ \mu_0 \frac{\Delta'^2}{2} + \mu_2 \left( \frac{a^2 \Delta'^2}{2} - 2\Delta^2 \right) \right]. \quad (5.54)$$

Мы воспользовались здесь приближенным равенством  $\Phi' \approx 2\pi a B_0$  и положили для простоты  $\mu_4 = 0$ .

При выводе формулы (5.54) учтена лишь вмороженность потоков внутри плазменного шнура. Она обеспечивается возникновением объемного тока (5.54). Теперь следует учесть и вмороженность внешнего полоидального потока — между плазмой и кожухом или хорошо проводящими катушками продольного поля. Приравнивая, как и в плазме при  $a < b$ ,  $\mu(a_c, t = -0)$  и  $\mu(a_c, t = +0)$ , где  $a_c$  — радиус кожуха, получаем выражение для полного продольного тока, текущего в плазме:

$$J_0 = \frac{2\pi a_c^2 B_0}{R} (\mu_0 + \mu_2 a_c^2) \frac{\Delta'^2(a_c)}{2}. \quad (5.55)$$

В (5.55) учтено, что  $\Delta(a_c) = 0$ . В вакуумном промежутке  $b < a < a_c$ ,  $J(a, t = 0) = J_0 = \text{const}$ . Несовпадение пределов  $\lim_{a \rightarrow b-0} J(a, t = 0)$  и

$\lim_{a \rightarrow b+0} J(a, t = 0)$  означает, что по поверхности плазмы течет поверхностный ток. Этот ток  $J_s$  равен разности токов  $J_0$  и  $J$  (5.54) для  $a = b$ :

$$J_s = \frac{2\pi B_0}{R} \left\{ \frac{1}{2} \mu_0 [a_c^2 \Delta'^2(a_c) - b^2 \Delta'^2(b)] + \mu_2 \left[ \frac{1}{2} (a_c^4 \Delta'^2(a_c) - b^4 \Delta'^2(b)) + 2\Delta^2(b) \right] \right\}. \quad (5.56)$$

Поверхностный ток должен течь и по кожуху, так как полный ток  $J(a_c + 0, t=0)$  должен быть равен нулю (внешний по отношению к проводящему кожуху поток магнитного поля не изменяется). Естественно, поверхностный ток — это идеализация, связанная с используемой при описании упрощенной моделью (резкая граница, высокая проводимость).

Формулы (5.54) — (5.56) совместно с уравнениями равновесия (5.48), (5.49) полностью описывают генерацию продольного тока при быстром нагреве плазмы в стеллараторах. Генерация тока может быть легко обнаружена экспериментально. Ток, который можно измерить поясом Роговского, помещенным в вакуумный промежуток  $b < a < a_c$ , определяется формулой (5.55). Он несколько меньше полного объемного тока (5.54), так как его частично компенсирует поверхностный ток (5.56).

Распределение объемного тока, индуцированного при быстром нагреве плазмы, существенно зависит от профиля  $\mu_{st}(\rho)$ . В стеллараторах без шира ( $\mu_2=0$ ) как в двухзаходных ( $\mu_0 = m e_2^2/4$ ) типа WVII-A, так и в стеллараторах с винтовой осью ( $\mu_0 = -\kappa R$ ) типа асператор ток (5.54) скинирован. На магнитной оси средняя плотность тока  $\bar{j} = J/\pi a^2$  обращается в нуль:

$$\bar{j}_{\mu_2=0} = \mu_0 (B_0/R) \Delta'^2, \quad (5.57)$$

на оси  $\Delta'(0) = 0$ . Величина  $|\Delta'|$  растет к краю плазменного шнура, индуцированный ток течет на периферии шнура.

В стеллараторах же с широм вакуумного поля ( $\mu_2 \neq 0$ ), в которых геометрическая ось является физически выделенной, распределение индуцированного тока значительно сложнее. В трехзаходном стеллараторе

$$\bar{j}_{\mu_0=0} = \mu_2 (B_0/R) (a^2 \Delta'^2 - 4\Delta^2). \quad (5.58)$$

Ток течет во всем объеме плазменного шнура, причем на оси и на периферии шнура — в противоположных направлениях. При значительных смещениях магнитной оси относительно геометрической в приосевой области индуцируется довольно сильный ток с плотностью  $\bar{j}_0 \approx -4\mu_2 B_0 \Delta_0^2 / R < 0$ . При этом в зависимости от граничных условий полный объемный ток может оказаться положительным ( $J > 0$ ), если смещение на краю мало, либо отрицательным ( $J < 0$ ), если смещение границы велико. В первом случае кроме тока, текущего в приосевой области, более сильный ток противоположного знака течет во внешней области плазмы. Во втором случае должен возникнуть сильный поверхностный ток  $J_s > 0$ , поскольку  $J_0 = J(b) + J_s > 0$  согласно формуле (5.55).

Генерация продольного тока при быстром нагреве плазмы возможна и в токамаках ( $\mu_{st}=0$ ). При наличии внешней ЭДС для описания генерации тока достаточно учесть не зависящий от времени продольный ток омического нагрева. Как нетрудно видеть из (5.45), при быстром нагреве плазмы в токамаке полный ток возрастает, дополнительный ток скинирован. Генерация тока на оси —

особенность стеллараторов с широм. Этот эффект связан с тем, что магнитная ось попадает в область, где вакуумное вращательное преобразование больше, чем было на несмещенной оси.

Для получения явной зависимости генерируемого тока от давления плазмы необходимо решить уравнение для смещения (5.48). Рассмотрим случай  $\mu_2=0$ , когда для оценки тока достаточно воспользоваться линейным уравнением для смещения, справедливым при  $|\Delta'| \ll 1$ ,

$$(a^3 \Delta')' = -2p' a^2 k R^2 / (\mu_0^2 B_0^2), \quad (5.59)$$

которое получается из (5.47) в пренебрежении малым членом порядка  $\Delta$ . Решение этого уравнения при произвольной зависимости  $p(a)$  имеет вид

$$\Delta' = \begin{cases} \frac{kR^2}{\mu_0^2} \frac{\beta(a)}{a}, & a < b; \\ \frac{kR^2}{\mu_0^2} \beta \frac{b^2}{a^3}, & a > b, \end{cases} \quad (5.60)$$

где  $\beta = \beta(b)$ ;  $\bar{p}(a)$  определяется формулой (5.33), а  $\beta(a) = 2[\bar{p}(a) - \bar{p}(a)]/B_0^2$ .

Подставляя  $\Delta'$  в (5.54) и (5.55), получаем явную связь тока с давлением плазмы

$$J(a, 0) = \begin{cases} \beta^2(a) \frac{\pi k^2 R^3}{\mu_0^3} B_0, & a < b; \\ \beta^2 \frac{\pi k^2 R^3}{\mu_0^3} \frac{b^4}{a^4}, & b < a < a_c. \end{cases} \quad (5.61)$$

Ток, который можно измерить сразу же после быстрого нагрева плазмы, определяется формулой (5.61) для  $b < a < a_c$ . Он может оказаться довольно большим. Так, для стелларатора с винтовой осью при  $k = \kappa$ ,  $\kappa b = 0,1$ ,  $b = 10$  см,  $b/a_c = 0,9$ ,  $B_0 = 0,5$  Тл генерируемый ток при  $\beta = 5\%$  равен 2 кА. Для стелларатора WVII-A, параметры которого [17]  $R = 200$  см,  $\mu_0 = 0,23$ ,  $b/a_c = 10/17$ ,  $B_0 = 3,5$  кГс, при  $\beta = 0,1\%$  ток (5.61) составляет 20 А. При оценках следует иметь в виду, что для того, чтобы привести (5.61) в гауссову систему единиц, ток  $J$  следует умножить на  $4\pi/c$ , где  $c$  — скорость света. Формула (5.61) получена при условии  $|\Delta'| \ll 1$ , поэтому в (5.61) можно подставлять лишь  $\beta$ , не превышающие равновесный предел. Заметим, что измеряемый ток существенно зависит от ширины вакуумного зазора. Если кожуха нет ( $a_c \rightarrow \infty$ ), то  $J_0 = 0$ , объемный ток полностью компенсируется поверхностным.

Мы рассмотрели до конца лишь случай  $\mu = \text{const}$ . Решение задачи эволюции в стеллараторах с широм требует применения численных методов. Эволюция равновесия плазмы в двухзаходном стеллараторе при вмороженности магнитных потоков численно исследовалась в [68]. Было обнаружено, в частности, что при нагре-

вё плазмы в ней индуцируется продольный ток. Этот результат численного счета в [68] объяснен не был.

**Релаксация равновесия после быстрого нагрева.** Возникший при быстром нагреве плазмы продольный ток из-за конечной проводимости плазмы  $\sigma_{\parallel}$  затухает, при этом меняется вращательное преобразование и равновесие эволюционирует к стационарному состоянию. Преобразуем уравнение эволюции (2.114) к виду, более удобному для описания затухания тока. С помощью уравнения Крускала — Кульсруда (1.3) оно приводится к виду

$$\dot{\Phi}\psi' - \Phi'\dot{\psi} = \frac{J' \langle B^2 \rangle + J\rho'}{\sigma_{\parallel} \Phi'} V', \quad (5.62)$$

где  $\langle B^2 \rangle = (F\Phi' - J\psi'/V' - \text{среднее по слою между близкими магнитными поверхностями. Мы рассматриваем случай сильного продольного поля, поэтому в этом уравнении можно пренебречь членом } \dot{\Phi}/\Phi' \text{ по сравнению с } \dot{\psi}/\psi', \text{ вместо } \langle B^2 \rangle \text{ подставить } B_0^2. \text{ Учитывая, что с высокой точностью } \Phi' = 2\pi a B_0, V' = 4\pi^2 \langle V\bar{g} \rangle_0, r = 2\pi a L, \text{ из уравнения (5.62) получаем при естественном допущении } |J'/J| \gg \gg |p'/B_0^2| \text{ [при } t=0 \text{ это неравенство следует из (5.54) или (5.61)]}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi_0 - \chi) = - \frac{R}{\sigma_{\parallel} a} J', \quad (5.63)$$

где  $\chi$  — внутренний полоидальный поток (1.2), и, дифференцируя по  $a$ ,

$$\frac{\partial \chi'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{R}{\sigma_{\parallel} a} \frac{\partial J'}{\partial a} \right]. \quad (5.64)$$

Входящую сюда величину  $\chi$  выражаем из первого уравнения (2.81):

$$\chi' = - (\alpha_{23}^0 / \alpha_{22}^0) \Phi' + J / \alpha_{22}^0. \quad (5.65)$$

Коэффициенты  $\alpha_{ik}^0$  легко вычисляются с помощью формул, приведенных в приложении 3.

Если давление плазмы ниже равновесного предела, который определяется при равном нулю продольном токе, то в процессе релаксации смещение и эллиптичность в стеллараторах с  $\mu_0 \neq 0$  и малым широм меняются слабо. Это следует из уравнений (5.48), (5.49): решая их при  $t = +0$ , когда  $\mu(a) = \mu_{st}(a)$ , и при  $t = +\infty$ , когда возникший при быстром нагреве ток затух, можно убедиться, что в процессе релаксации равновесия внутренняя геометрия плазмы меняется незначительно. Подчеркнем, что это утверждение справедливо лишь при  $\beta < \beta_{eq}$  — максимального по равновесию  $\beta$ . Если же  $\beta \geq \beta_{eq}$ , то конечного равновесного состояния с  $J=0$  не существует.

Итак, при  $\beta < \beta_{eq}$ , дифференцируя по времени  $\chi'$  (5.65), можно отбросить малые члены и оставить только  $(\alpha_{22}^0)^{-1} J$ . Учитывая, что с высокой точностью  $\alpha_{22}^0 = R/a$ , из (5.64) получаем уравнение, описывающее затухание продольного тока:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = a \frac{\partial}{\partial a} \left[ \frac{1}{\sigma_{\parallel} a} \frac{\partial J}{\partial a} \right]. \quad (5.66)$$

Это уравнение, полученное в пренебрежении малыми по сравнению с единицей членами  $\beta$ ,  $kb$ ,  $\dot{\Delta}'^2$ ,  $J\dot{\Delta}'/J\Delta'$ , имеет такой же вид, как и для цилиндра. При  $\sigma_{\parallel} = \text{const}$  его общее решение записывается

$$J(a, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n a J_1(\gamma_n a/b) \exp\{-\gamma_n^2 t / \sigma_{\parallel} b^2\}, \quad (5.67)$$

где  $J_1$  — функция Бесселя. Вне плазмы, где  $\sigma_{\parallel} = 0$ ,  $J = J_0(t)$ .

Значение тока при  $t=0$  известно [см. (5.54), (5.55)]. Остается поставить граничные условия. Этим условием является равенство нулю электрического поля на проводящем кожухе. В сильном продольном поле при  $\partial\Phi(b, t)/\partial t = 0$  это условие сводится к требованию  $E_z|_{a=b} = -\partial\psi(b, t)/\partial t = 0$ . Поток  $\psi$ , равный  $\psi_0 - \chi$ , зависит от потока  $\chi$ , определяемого уравнением (5.65). Интегрируя  $\chi'$  в вакуумном промежутке  $b < a < a_c$ , где  $J = J_0(t)$ , получаем с точностью до малых членов

$$\chi(a, t) = \chi(b, t) + J_0(t) R \ln(a/b) + \pi(a^2 - b^2) \mu_0 B_0. \quad (5.68)$$

Теперь, учитывая, что потоки и их производные по времени являются непрерывными функциями  $a$ , и, используя уравнение (5.63), получаем

$$\frac{\partial\psi(b, t)}{\partial t} = -\frac{R}{\sigma_{\parallel} b} J'(b-0, t) - R \dot{J}_0 \ln \frac{a_c}{b} = 0. \quad (5.69)$$

Его решение, убывающее до нуля при  $t \rightarrow \infty$ , имеет вид

$$J_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n \ln(a_c/b)} b J_0(\gamma_n) \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 t}{\sigma_{\parallel} b^2}\right). \quad (5.70)$$

В любой момент времени, кроме  $t=0$ , ток — непрерывная функция  $a$ , т. е.  $J_0(t) = J(b, t)$ . Сравнивая (5.67) и (5.70), получаем уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n b \left[ J_1(\gamma_n) - \frac{J_0(\gamma_n)}{\gamma_n \ln(a_c/b)} \right] \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 t}{\sigma_{\parallel} b^2}\right) = 0, \quad (5.71)$$

которое сводится к

$$\gamma_n J_1(\gamma_n) \ln(a_c/b) - J_0(\gamma_n) = 0 \quad (5.72)$$

и служит для определения величин  $\gamma_n$ . Заметим, что при этом функции  $J_0(\gamma_n a/b)$  ортогональны с весом  $a$  на интервале  $(0, b)$ . Это трудно показать, используя хорошо известную формулу

$$\int_0^b J_n\left(\alpha_1 \frac{a}{b}\right) J_n\left(\alpha_2 \frac{a}{b}\right) a da = b^2 \frac{\alpha_1 J_n'(\alpha_1) J_n(\alpha_2) - \alpha_2 J_n(\alpha_1) J_n'(\alpha_2)}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}. \quad (5.73)$$

Коэффициенты  $C_n$  определяются начальными условиями. Вместо тока (5.67), который выражается через функции  $J_1(\gamma_n a/b)$ , удобно при определении  $C_n$  использовать производную  $J'$ , которую можно

представить в виде

$$J'(a, t=0) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \gamma_n \frac{a}{b} J_0\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right), & a < b, \\ 0, & a > b. \end{cases} \quad (5.74)$$

Производная  $J'$  выражается с помощью полной системы ортогональных функций  $\{J_0(\gamma_n a/b)\}$ . С другой стороны, из полученных формул для продольного тока следует

$$J'(a, t=0) = \begin{cases} \frac{\partial J(a, t=0)}{\partial a}, & a < b; \\ J_s \delta(a-b), & a = b; \\ 0, & a > b. \end{cases} \quad (5.75)$$

Эту производную с  $\delta$ -функцией, учитывающей скачок тока на границе плазмы, следует рассматривать как обобщенную функцию [154]. По общим правилам (см., например, [155]) получаем для коэффициентов  $C_n$  уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_n}{b} C_n \left\| J_0\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right) \right\|^2 = \\ & = \int_0^b \frac{\partial J(a, t=0)}{\partial a} \Big|_{a < b} J_0\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right) da + J_s J_0(\gamma_n), \end{aligned} \quad (5.76)$$

где

$$\left\| J_0\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right) \right\|^2 \equiv \int_0^b a J_0^2\left(\gamma_n \frac{a}{b}\right) da = \frac{b^2}{2} \{ [J_0'(\gamma_n)]^2 + J_0^2(\gamma_n) \}$$

— квадрат нормы функции Бесселя. Эта формула легко получается из (5.73) при переходе к пределу при  $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$  и раскрытии неопределенности в правой части.

Теперь, когда определены коэффициенты  $C_n$  и  $\gamma_n$ , задача релаксации тока решена полностью.

Индукционный ток, возникший при быстром нагреве плазмы, затухает с характерным временем  $\tau = \sigma \parallel b^2 / \gamma_1^2$ . Для описания релаксации в формуле (5.67) достаточно оставить несколько первых членов, потому что они описывают более медленные изменения тока, чем последующие члены. Числа  $\gamma_n$  составляют последовательность, немного (особенно при больших  $n$ ) отличающуюся от последовательности корней функции  $J_1(x)$ , что следует из (5.72), где при больших  $n$  второй член мал,  $\lim_{n \rightarrow \infty} J_0(\gamma_n) / \gamma_n = 0$ . Из асимптотической формулы для функции Бесселя  $\nu$ -го порядка

$$J_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi \nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.77)$$

следует, что каждый следующий коэффициент  $\gamma_n$  при больших  $n$  больше предыдущего на  $\pi/2$ . Первый корень уравнения (5.72),  $\gamma_1$ , находится в интервале  $0 < \gamma_1 < 2,4$ . Следующий,  $\gamma_2$  — между вторыми корнями функций  $J_1$  и  $J_0$ :  $3,8 < \gamma_2 < 5,5$ . Для отношения  $\gamma_n/\gamma_2$  можно пользоваться оценкой  $\gamma_n/\gamma_2 \approx n-1$ .

В процессе релаксации тока существенно изменяется его распределение. Так, в стеллараторе без шира, где ток при  $t=0$  скинирован, возникает ток и на магнитной оси. Из-за быстрого затухания поверхностного тока меняется полный ток  $J_0(t)$ , который можно измерить электротехническими методами. Значение  $J_0(t)$  может даже возрасть в начальный момент, так что можно зарегистрировать ток, который при  $t=0$  был полностью компенсирован поверхностным током  $J_s$ .

Эффект генерации тока может быть использован для целей диагностики плазмы. Ток, индуцированный при быстром нагреве плазмы, определяется значением  $\beta$ , а время его затухания зависит от  $\sigma_{\parallel}$ . Таким образом, по току и его производной  $\partial J/\partial t$  можно оценить  $\beta$  и  $\sigma_{\parallel}$ .

### 5.3. Об особенности диамагнитного эффекта в стеллараторах

Среди методов бесконтактной диагностики плазмы одними из самых простых являются измерения диамагнитного эффекта. Техника этих измерений на токамаках и стеллараторах экспериментаторами хорошо освоена [156—160]. В случае токамака интерпретация результатов измерений не вызывает сомнений. Полученная еще в 1958 г. простая формула [161], связывающая отношение газокINETического давления плазмы к магнитному  $\beta = 2\bar{p}/B_0^2$ , относительное изменение потока продольного поля в сечении плазменного шнура  $\Delta\Phi/\Phi$  и квадрат отношения напряженностей полоидального поля  $B_J = J/(2\pi b)$  и тороидального  $B_0$ ,

$$2\Delta\Phi/\Phi = B_J^2/B_0^2 - \beta \quad (5.78)$$

позволяет без труда по данным измерений определить энергосодержание плазмы (см. также [162 и 163]).

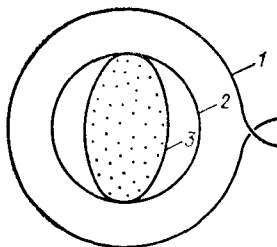
Для стелларатора эта формула требует уточнения: при ее выводе необходимо учитывать модуляцию (зависимость от  $\xi$ ) полей и токов. В конечном итоге различие проявляется в том, что выражение для  $\Delta\Phi/\Phi$  содержит дополнительный член, пропорциональный отношению напряженностей полоидального поля тока и продольного тока, т. е. диамагнитный сигнал зависит от направления тока омического нагрева.

Впервые эта зависимость была экспериментально установлена Э. Д. Андрухиной и О. И. Федяниным на стеллараторе «Ливень-2» [159]. В этой же работе был проведен и теоретический расчет эффекта. Одновременно в [164] был получен несколько отличающийся результат. Еще одно выражение для  $\Delta\Phi$  в двухзаходном стеллараторе с током омического нагрева, не совпадающее с аналогич-



Рис. 30. Схема диамагнитных измерений:

1 — измерительный контур; 2 — граница области усреднения; 3 — граница плазмы



ными формулами предшествующих работ [159, 164], было получено М. И. Михайловым [65].

Причины различия этих трех результатов объяснены в [165]. В токамаках и стеллараторах с камерой круглого сечения изменение в процессе разряда продольного потока измеряется обычно с помощью круглой петли  $r = \text{const}$ . В [164] был рассчитан диамагнитный сигнал  $\Delta\Phi$  через некруглый контур, лежащий на магнитной поверхности, в предположении неизменности полного тока в плазме, который в начале разряда ( $\beta = 0$ ) сосредоточен на оси, и неизменности внутренней геометрии системы с ростом  $\beta$ . Хотя расчеты в [164] верны, постановка задачи несколько искусственная. В [159] вычислялся сигнал  $\Delta\Phi$  через круглый контур, но были допущены ошибки: не полностью учтена модуляция плотности тока, усреднение по углу  $\varphi$  при  $r = \text{const}$  ошибочно отождествляется с усреднением вдоль магнитной поверхности. Результат расчета в [65], выполненного для двухзаходного стелларатора корректно и без модельных предположений, верен. Однако вычисления, в ходе которых вначале совершается переход от опорной системы координат к потоковой, а затем обратно, неоправданно сложны. Заметим, что высказанное в [65] предположение о причинах отличия полученного для  $\Delta\Phi$  выражения от аналогичного результата в [159] неверно.

Следуя [165], где использован простой метод расчета диамагнитного эффекта, сходный с предложенным в [159], рассмотрим прямой стелларатор и вычислим для него  $\Delta\Phi$  методом разложения. Все вычисления проведем в обычной цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ , ось  $z$  которой совпадает с прямой осью стелларатора. Малыми параметрами будем считать  $\epsilon_n = |\tilde{\mathbf{B}}|/B_0, B_J/B_0$  и  $\beta$ . Здесь и далее

$$\tilde{f} = f - \bar{f}, \quad \bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r, \varphi, z) d\varphi;$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{A}_r \mathbf{e}_r + \tilde{A}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \tilde{A}_z \mathbf{e}_z, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}.$$

Для стеллараторов, в которых зависимость физических величин от  $\varphi$  и  $z$  имеет вид  $\Sigma \lambda_n \exp(in(\varphi - \alpha_n z))$ , усреднение по  $\varphi$ , очевидно, эквивалентно усреднению по  $z$ .

Продольный поток  $\Phi$ , охватываемый круглым измерительным контуром  $r = c = \text{const}$ , лежащим в плоскости  $z = \text{const}$  (рис. 30),

$$\Phi = \int B_z r dr d\varphi = 2\pi \int_0^c \bar{B}_z r dr, \quad (5.79)$$

изменяется в процессе разряда из-за вызванного полоидальными токами изменения поля  $B_z$ . Связь  $B_z$  с  $j_\varphi$  дается  $\varphi$ -й компонентой уравнения Максвелла  $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$ :

$$\partial B_z / \partial r = -j_\varphi + \partial B_r / \partial z. \quad (5.80)$$

Умножая это уравнение на  $r^2$  и интегрируя по  $r$  и  $\varphi$ , получаем

$$\Phi = \pi c^2 \bar{B}_{ze} + \pi \int_0^c \bar{j}_\varphi r^2 dr, \quad (5.81)$$

где  $\bar{B}_{ze} = \text{const}$  — среднее продольное поле вне плазменного шнура. Круглой диамагнитной петлей  $r=c$  измеряется разность потоков  $\Phi$  (5.81) в момент разряда и  $\Phi_0 = \pi c^2 B_0$  — вакуумного потока при  $\beta=0$  (и отсутствии токов в рабочем объеме):

$$\Delta\Phi = \pi c^2 (\bar{B}_{ze} - B_0) + \pi \int_0^c \bar{j}_\varphi r^2 dr. \quad (5.82)$$

Обычно диамагнитным сигналом называют второе слагаемое в (5.82), описывающее изменение в процессе разряда  $\Phi$ , связанное только с диамагнитными плазменными токами. Для того чтобы отделить его от изменения  $\Phi$  из-за непостоянства во времени внешнего продольного поля [первое слагаемое в (5.82)], необходимо контролировать ток в катушках продольного поля. При быстром нарастании давления плазмы он должен так измениться, чтобы обеспечить сохранение полного потока продольного поля, охватываемого этими катушками. В некоторых экспериментах на токамаках этот эффект использовался для определения изменения потока  $\delta\Phi$  в сечении плазменного витка [156, 157]. Изменение тока в катушках продольного поля в эксперименте может быть легко определено, поэтому первое слагаемое в (5.82), связанное с отличием  $\bar{B}_{ze}$  от  $B_0$ , при измерениях можно компенсировать [159], так что будет измеряться

$$\Delta\Phi_k = \pi \int_0^c \bar{j}_\varphi r^2 dr, \quad (5.83)$$

где индекс  $k$  указывает на то, что часть сигнала компенсирована.

Усредненную  $\varphi$ -ю компоненту плотности тока, входящую в (5.83), будем определять из общего выражения

$$\mathbf{j} = [\mathbf{B} \nabla p] / B^2 + \alpha \mathbf{B} \quad (5.84)$$

методом разложения. При малых  $\beta$  вклад в  $j_\varphi$  диамагнитного тока [первое слагаемое в (5.84)] достаточно учесть в низшем приближении, в то же время при усреднении слагаемого  $\alpha \mathbf{B}$  необходимо сохранить квадратичные по  $\varepsilon_h$  члены:

$$\bar{j}_\varphi = \frac{\bar{B}_z}{B^2} \frac{d\bar{p}}{dr} + \bar{\alpha} \bar{B}_\varphi + \overline{\alpha \bar{B}_\varphi}. \quad (5.85)$$

Специфическая для стеллараторов зависимость диамагнитного сиг-

нала от направления тока омического нагрева связана именно с наличием  $\overline{\alpha\tilde{B}_\varphi}$  в (5.85).

Легко убедиться, разлагая  $\alpha = \mathbf{jB}/B^2$  по  $\varepsilon_h$ , что

$$\overline{\alpha} = \overline{j\tilde{B}/\tilde{B}^2}; \quad \tilde{\alpha} = (\overline{j\tilde{B}} + \overline{j\tilde{B}} - 2\overline{\alpha\tilde{B}\tilde{B}})/\overline{B^2}. \quad (5.86)$$

Как обычно, поле  $\tilde{\mathbf{B}}$  можно считать известным, поэтому для того, чтобы вычислить  $\overline{\alpha\tilde{B}_\varphi}$ , нужно выразить  $\tilde{j}$  в (5.86) через  $\tilde{\mathbf{B}}$  и средние поля и токи. Для случая, когда порядок всех входящих в (5.85) членов одинаков (только тогда и может проявиться обнаруженный Э. Д. Андриюхиной и О. М. Федяниным эффект [159]), полоидальная составляющая  $\tilde{j}$ , определяемая из (5.84), равна

$$\tilde{j}_p = \overline{\alpha\tilde{B}_p}. \quad (5.87)$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{B}}_p = \tilde{\mathbf{B}} - \tilde{B}_z \mathbf{e}_z$ . Уравнение непрерывности тока  $\text{div } \tilde{\mathbf{j}} = 0$  принимает с учетом (5.87) вид

$$\partial \tilde{j}_z / \partial z = \overline{\alpha} \partial \tilde{B}_z / \partial z - \tilde{\mathbf{B}}_p \nabla \overline{\alpha}, \quad (5.88)$$

где с помощью  $\text{div } \tilde{\mathbf{B}} = 0$  исключена  $\text{div } \tilde{\mathbf{B}}_p$ , и позволяет определить  $\tilde{j}_z$ :

$$\tilde{j}_z = \overline{\alpha\tilde{B}_z} - \widehat{R\tilde{B}_p} \nabla \overline{\alpha}. \quad (5.89)$$

По аналогии с (4.15) переменную часть неопределенного интеграла  $\int \tilde{j} dz$  обозначаем  $\widehat{R\tilde{f}}$ ;  $2\pi R$  — полная длина системы (по оси  $z$ ). Подставляя теперь  $\tilde{j}$  в формулу (5.86) для  $\tilde{\alpha}$ , получаем

$$\tilde{\alpha} = -(\overline{B_z/B^2}) \widehat{R\tilde{B}_p} \nabla \overline{\alpha} + (\overline{j} - \overline{\alpha\tilde{B}}) \tilde{\mathbf{B}}/\tilde{B}^2. \quad (5.90)$$

Последним членом, содержащим лишь поперечную компоненту  $\tilde{j}$ , можно при малых  $\beta$  пренебречь. В этом случае

$$\overline{\alpha\tilde{B}_\varphi} = -R \frac{\overline{B_z}}{\overline{B^2}} \widehat{R\tilde{B}_p} \nabla \overline{\alpha} = R \frac{\overline{B_r\tilde{B}_\varphi}}{B_0^2} \frac{d\tilde{j}_z}{dr} = \frac{\psi_v}{2\pi R B_0} \frac{d\tilde{j}_z}{dr}, \quad (5.91)$$

где  $\psi_v$  — это функция, о которой уже шла речь в гл. 1 и 3; см. также приложение 2. Отметим, что для плазменного шнура с круглым в среднем сечением  $\psi_v = \psi_v(r)$ .

После подстановки  $\tilde{j}_\varphi$ , выраженной через средние величины, в (5.82) и простейших преобразований для  $\Delta\Phi_h$  получаем формулу

$$\Delta\Phi_h = -(\beta/2) \pi b^2 B_0 + J_b^2/(8\pi B_0) + \Delta\Phi_{st}, \quad (5.92)$$

где  $b$  — средний радиус плазменного шнура;  $J_b$  — полный ток в плазме ( $B_J = J_b/(2\pi b)$ );

$$\Delta\Phi_{st} = -\frac{1}{2RB_0} \int_0^c \tilde{j}_z \frac{d}{dr} (r^2 \psi_v) dr. \quad (5.93)$$

Связь (4.61)  $\psi_v(r)$  с  $\mu_h(r)$  позволяет переписать (5.93) в более удобном для практического использования виде:

$$\Delta\Phi_{st} = \frac{\pi}{R} \int_0^c \bar{j}_z \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \int_0^r \rho \mu_h(\rho) d\rho \right\} dr. \quad (5.94)$$

Формула (5.92) отличается от аналогичной для токамака наличием члена  $\Delta\Phi_{st}$  (в [159] ему соответствует член  $4\pi\bar{\Phi}_3$ ), знак которого определяется знаком  $\bar{j}_z$ . Как видно из (5.94),  $\Delta\Phi_{st}$  существенно зависит от распределения  $\bar{j}_z$ . Наибольшее значение  $\Delta\Phi_{st}$  может иметь при скинированных профилях  $\bar{j}_z(r)$ , поскольку множитель при  $\bar{j}_z$  в подынтегральном выражении (5.94) является растущей функцией радиуса.

Заметим в заключение, что вычисления  $\Delta\Phi$  просты лишь для круглого в среднем плазменного шнура и круглого измерительного контура. При больших  $\beta$ , сравнимых с  $\beta_{eq}$ , определение  $\Delta\Phi$  возможно лишь после решения уравнений равновесия.

Зависимость диамагнитного сигнала от направления продольного тока является следствием «трансляционного преобразования» [146] полоидального потока в тороидальный, которое, как и аналогичное вращательное преобразование, осуществляется с помощью внешних винтовых полей. Этот эффект особенно ярко может проявиться в пинчах — конфигурациях со слабым продольным полем.

Как известно, в стабилизированном пинче в результате неуправляемого процесса перехода конфигурации в устойчивое состояние возникает самопроизвольное обращение продольного поля. При этом обеспечивается необходимый для устойчивости монотонный профиль  $q$  (запас устойчивости по терминологии токамаков) с обращением на границе плазмы. В винтовом пинче, который получается из обычного стабилизированного пинча при наложении дополнительных винтовых полей, обращение  $q$  может частично или полностью осуществляться за счет трансляционного преобразования, порожденного внешними винтовыми полями. Такая конфигурация, в которой обращение  $q$  осуществляется в результате управляемого процесса, была предложена Т. Окавой [146]. (В предложении Окавы речь идет не об обращении продольного поля локально в каждой точке по азимуту, а о более тонком эффекте, таком же, как эффект вращательного преобразования в стеллараторах.)

Наличие эффекта трансляционного преобразования и его основные свойства можно установить при анализе самых общих МГД-уравнений. В частности, зависимость  $\Phi$  от  $J$  следует уже из уравнений (2.103), связывающих токи с потоками. Для пинчей с обращенным полем, где  $q \ll 1$ , кривизна тора, в отличие от токамака ( $q \sim 1$ ), не играет существенной роли, поэтому винтовой пинч можно рассматривать в приближении винтовой симметрии, считая, что его ось — прямая.

Равновесие плазмы в конфигурации с винтовой симметрией описывается уравнением (3.8). Входящие в (3.8) поток  $\psi$  и ток  $F$  свя-

заны с внешними полоидальными потоком  $\psi_\omega$  и током  $I$  соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_\omega + N\Phi; \\ F &= I + NJ. \end{aligned} \right\} \quad (5.95)$$

Из (5.95) и (2.103) следует, что

$$\Phi' = \Lambda (I + \mu J), \quad (5.96)$$

где  $\Lambda = \alpha_{22}^0 [\alpha_{22}^0 \alpha_{33}^0 - (\alpha_{23}^0)^2]^{-1}$ ;  $\mu = N - \alpha_{23}^0 / \alpha_{22}^0$ .

При  $\mu \neq 0$  продольный поток явно зависит от продольного тока, что и является проявлением трансляционного преобразования. Величина  $\mu$  определяется только формой магнитных поверхностей (при круглых поверхностях  $\mu = 0$ ). В двухзаходной конфигурации, например, магнитные поверхности которой — несмещенные эллипсы [см. (3.60)], с помощью (3.61) легко получить для  $\mu$  формулу

$$\mu = N (1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) = \frac{N\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}, \quad (5.97)$$

аналогичную формуле (1.16) для вращательного преобразования  $\mu_L$ .

Уравнение (5.96) показывает, что в принципе эффект трансляционного преобразования может помочь обращению (переходу через ноль) величины  $q = -\Phi' / \psi_\omega'$ , характеризующей шаг силовых линий. Однако формула (5.96) еще не доказывает возможность предложенного в [146] стационарного поддержания обращенного профиля  $q$  за счет трансляционного преобразования. Для осуществимости длительного, стационарного поддержания такой конфигурации нужно, чтобы она была совместима с законом Ома.

Закон Ома [уравнение эволюции (2.114) или (2.118)] вместе с интегральными соотношениями (2.103) при заданном давлении  $p(\psi)$  однозначно определяют распределения токов и потоков. Для  $\bar{B}_z \equiv \Phi' / (2\pi a)$  из этой системы получается уравнение [141]

$$\bar{B}_z' = \left[ \frac{p'}{\langle B^2 \rangle} + \frac{\Lambda}{a} \left( \frac{a}{\Lambda} \right)' + \sigma_{\parallel} \frac{J\varepsilon_0 - \dot{\Phi}/q}{\langle B^2 \rangle V'} \frac{\Lambda}{\alpha_{22}^0} \right] \bar{B}_z + \Lambda \mu' \frac{J}{2\pi a}. \quad (5.98)$$

Отсюда следует, что стационарная конфигурация с обращенным шагом силовых линий возможна. Но для ее поддержания одного только условия  $\mu \neq 0$  недостаточно. Необходимо, чтобы была отлична от нуля величина  $\mu'(a) \equiv d\mu/da$ . В этом случае при обращении  $\bar{B}_z$  в нуль производная  $\bar{B}_z'$  отлична от нуля [последнее слагаемое в уравнении (5.98)] и  $\bar{B}_z$  может перейти через нуль. Возможность получения стационарных конфигураций с обращением шага силовых линий за счет одного только трансляционного преобразования была доказана детальными численными расчетами [111].

## Глава 6. МГД-НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ

### 6.1. Уравнения малых колебаний

Как известно, для равновесных плазменных систем наибольшую опасность представляют МГД-неустойчивости, имеющие большой инкремент и приводящие поэтому к быстрой перестройке начального (неустойчивого) равновесия. Изложению теории МГД-неустойчивостей плазмы посвящен ряд обзоров и монографий (см., например, [29, 31, 109, 166—168]). Со времени их публикации теория пополнилась исследованием баллонной моды неустойчивости в реальных конфигурациях. Эта неустойчивость во многом определяет предельно осуществимое давление плазмы в магнитных системах. Вместе с тем в областях с малым широм достаточным критерием устойчивости локальных мод является критерий Мерсье.

В отличие от критерия устойчивости баллонных мод, получение которого требует решения дифференциальных уравнений для конкретной геометрии системы, критерий Мерсье записывается в явном виде через равновесные величины. Несмотря на важность критерия Мерсье, в литературе нет простого изложения его вывода. Нам представляется уместным дать такой вывод наряду с выводом уравнения для баллонных мод. Приведем также вывод достаточных критериев устойчивости, которые в случае стелларатора оказываются содержательными: позволяют найти  $\beta$ , при котором плазма устойчива относительно произвольных возмущений в рамках идеальной магнитной гидродинамики.

Основу линейной теории МГД-устойчивости составляют линеаризованные уравнения идеальной магнитогидродинамики (МГД). В рамках МГД, являющейся простейшей моделью плазмы, находящейся в магнитном поле, плазма рассматривается как идеально проводящая изотропная квазинейтральная жидкость, описываемая уравнениями (см., например, [29, 168, 169]):

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0; \quad (6.1)$$

$$\rho (\partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}) = -\nabla p + [j\mathbf{B}]; \quad (6.2)$$

$$\partial\mathbf{B}/\partial t = \operatorname{rot} [v\mathbf{B}]; \quad (6.3)$$

$$(\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)(\rho/\rho^\gamma) = 0; \quad (6.4)$$

$$\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (6.5)$$

где  $\rho$  — плотность;  $\mathbf{v}$  — локальная макроскопическая скорость элемента жидкости;  $\gamma$  — показатель адиабаты (в общем случае — политропы). Символами  $p$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$  обозначены, как и раньше, давление плазмы, плотность тока и напряженность магнитного поля.

Малые отклонения от статического равновесия без течений можно описывать линеаризованными уравнениями (6.1)—(6.5) [29, 166—168]:

$$\partial\rho_1/\partial t + \operatorname{div} \rho\mathbf{v}_1 = 0; \quad (6.6)$$

$$\rho \partial\mathbf{v}_1/\partial t = -\nabla p_1 + [j_1\mathbf{B}] + [j\mathbf{B}_1]; \quad (6.7)$$

$$\partial \mathbf{B}_1 / \partial t = \text{rot} [\mathbf{v}_1 \mathbf{B}]; \quad (6.8)$$

$$(\partial / \partial t) (\rho / \rho^y)_1 = -\mathbf{v}_1 \nabla (\rho / \rho^y); \quad (6.9)$$

$$\mathbf{j}_1 = \text{rot} \mathbf{B}_1; \quad \text{div} \mathbf{B}_1 = 0. \quad (6.10)$$

Здесь индекс 1 используется для обозначения малых возмущений, а равновесные невозмущенные величины обозначены символами без индексов. Вводя, как обычно, смещение  $\xi$  элемента плазмы, связанное с  $\mathbf{v}_1$  соотношением

$$\mathbf{v}_1 = \partial \xi / \partial t, \quad (6.11)$$

для  $\rho_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  получаем из (6.6), (6.8), (6.9) известные выражения

$$\rho_1 = -\text{div} \rho \xi; \quad (6.12)$$

$$\rho_1 = -\gamma p \text{div} \xi - \xi \nabla p; \quad (6.13)$$

$$\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{Q} = \text{rot} [\xi \mathbf{B}]. \quad (6.14)$$

Преобразуем теперь оставшееся уравнение (6.7) к виду, удобному для исследования устойчивости мелкомасштабных возмущений. Входящие в (6.7) возмущения магнитного поля  $\mathbf{Q}$  и плотности тока  $\mathbf{j}_1 = \text{rot} \mathbf{Q}$  выразим через вектор  $\mathbf{T}$ , который определим как

$$\mathbf{T} \equiv \text{rot} [\xi \mathbf{B}] + \frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2} \xi \nabla a. \quad (6.15)$$

Здесь, как и прежде,  $a$  — метка магнитной поверхности. Уравнение (6.7) прямой подстановкой величин  $\mathbf{v}_1$ ,  $\rho_1$ ,  $\mathbf{j}_1$  и  $\mathbf{B}_1$  приводится к виду

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = [\text{rot} \mathbf{T} \mathbf{B}] + \left[ \mathbf{j}, \mathbf{T} - (\mathbf{T} \nabla a) \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} \right] + \nabla (\gamma p \text{div} \xi) + \xi \nabla a \left\{ \nabla p' + \frac{j^2}{|\nabla a|^2} \nabla a - \left[ \text{rot} \frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2} \mathbf{B} \right] \right\}, \quad (6.16)$$

при этом мы пользуемся лишь уравнениями равновесия (1.1) и следствием определения (6.15)

$$\mathbf{T} \nabla a = \mathbf{Q} \nabla a = \mathbf{B} \nabla (\xi \nabla a). \quad (6.17)$$

Разлагая вектор  $\mathbf{T}$  по тройке ортогональных векторов  $\nabla a$ ,  $\mathbf{B}$  и  $[\mathbf{B} \nabla a]$

$$\mathbf{T} = T_1 \nabla a + T_2 \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2} - T_3 \mathbf{B}, \quad (6.18)$$

преобразуем первые два члена в правой части (6.16):

$$[\text{rot} \mathbf{T} \mathbf{B}] + \left[ \mathbf{j}, \mathbf{T} - (\mathbf{T} \nabla a) \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} \right] = \nabla a \left\{ \mathbf{B} \nabla T_1 - \frac{j \mathbf{B}}{|\nabla a|^2} T_2 - 2p' T_3 + \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a \nabla T_3}{|\nabla a|^2} \right\} + \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2} (\mathbf{B} \nabla T_2 + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla T_3) - T_2 \left[ \mathbf{B} \text{rot} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2} \right]. \quad (6.19)$$

Для завершения вычислений необходимо преобразовать выражения  $\text{rot} \frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2}$  и  $\text{rot} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2}$ . Для первого, используя вытекающее из

уравнения равновесия  $\nabla p = [\mathbf{j}\mathbf{B}]$  представление

$$\mathbf{j} = \alpha \mathbf{B} + [\mathbf{B}\nabla p]/B^2; \quad \alpha \equiv \mathbf{j}\mathbf{B}/B^2 \quad (6.20)$$

и следствие уравнения  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$

$$\mathbf{B}\nabla\alpha = -\rho' [\mathbf{B}\nabla a] \nabla(1/B^2), \quad (6.21)$$

получаем

$$\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{j}\nabla a]}{|\nabla a|^2} = \mathbf{B} \frac{\nabla a \nabla \alpha}{|\nabla a|^2} + \alpha \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} - \mathbf{j} \frac{\rho'}{B^2} + \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \left( \nabla a \nabla \frac{\rho'}{B^2} \right). \quad (6.22)$$

Легко убедиться, взяв проекции на векторы  $\nabla a$ ,  $[\mathbf{B}\nabla a]$  и  $\mathbf{B}$ , что

$$\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \left( \operatorname{div} B^2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + \rho' \right) + \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} S, \quad (6.23)$$

где

$$S = \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2}. \quad (6.24)$$

Подставляя теперь (6.19), (6.22) и (6.23) в (6.16) и обозначая

$$T_0 \equiv \gamma p \operatorname{div} \xi, \quad (6.25)$$

получаем окончательно:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = & \nabla T_0 + \nabla a \left\{ K \xi \nabla a + \mathbf{B} \nabla T_1 + T_2 \left( S - \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \right) - 2\rho' T_3 + \right. \\ & \left. + B^2 \frac{\nabla a \nabla T_3}{|\nabla a|^2} \right\} + \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \operatorname{div} (T_2 \mathbf{B} + T_3 [\mathbf{B}\nabla a]). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Величина  $K$ , играющая в теории устойчивости важную роль, имеет вид

$$K = \frac{\mathbf{j}^2}{|\nabla a|^2} + \frac{\rho'}{B^2} \left( \rho' + \frac{\nabla a \nabla B^2}{|\nabla a|^2} \right) - \alpha S. \quad (6.27)$$

Другое выражение для  $K$  получается исключением  $\mathbf{j}_2$  с помощью (6.20):

$$K = \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{B^2} \left( \frac{\mathbf{j}\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} - S \right) + \frac{\rho'}{B^2} \frac{\nabla a \nabla (2\rho + B^2)}{|\nabla a|^2}. \quad (6.28)$$

Итак, преобразовав правую часть уравнения малых колебаний (6.7), мы привели его к виду (6.26). Будем в дальнейшем пользоваться этим векторным уравнением, представляя возмущение  $\xi$  в виде [170]

$$\xi = \xi \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + \eta \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} + \tau \frac{\mathbf{B}}{B^2} \quad (6.29)$$

и проецируя (6.26) на векторы  $\mathbf{B}$ ,  $[\mathbf{B}\nabla a]/B^2$  и  $\nabla a/(B^2|\nabla a|^2)$ . Проекция (6.26) на  $\mathbf{B}$

$$\rho \partial^2 \tau / \partial t^2 = \mathbf{B} \nabla T_0 \quad (6.30)$$



является простейшим из получающихся трех скалярных уравнений. Из этого уравнения следует, что продольная (вдоль  $\mathbf{B}$ ) компонента смещения  $\xi$  может возникать лишь благодаря сжимаемости плазмы ( $\text{div } \xi \neq 0$ ), да и то только в том случае, когда  $\text{div } \xi \neq f(a)$ . Из (6.30) следует также, что на границе устойчивости ( $\omega=0$ ) в тороидальных системах с незамкнутыми силовыми линиями  $T_0=f(a)$  и, следовательно,  $\nabla T_0$  в этом случае не имеет проекций на  $\mathbf{B}$  и  $[\mathbf{B}\nabla a]$ .

Второе уравнение, позволяющее установить связь  $\eta$  с  $\xi$ , простое

$$\frac{|\nabla a|^2}{B^2} \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \nabla T_0 + \mathbf{B}\nabla T_2 + [\mathbf{B}\nabla a] \nabla T_3, \quad (6.31)$$

для мелкомасштабных квазижелобковых или баллонных возмущений. При исследовании устойчивости относительно таких возмущений, вытянутых вдоль силовых линий и сильно локализованных в поперечных направлениях, в правой части (6.31) можно оставить при  $\omega=0$ , т. е. при  $T_0=T_0(a)$ , лишь последний член, так как только в нем компоненты смещения дважды дифференцируются по направлениям  $[\mathbf{B}\nabla a]$  и  $\nabla a$  (см. разд. 6.6).

Последнее уравнение

$$\frac{1}{B^2 |\nabla a|^2} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\nabla a \nabla T_3}{|\nabla a|^2} + \frac{1}{B^2} \left\{ \frac{\nabla a \nabla T_0}{|\nabla a|^2} - 2\rho' T_3 + T_2 \left( S - \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \right) + \mathbf{B}\nabla T_1 + K\xi \right\} \quad (6.32)$$

оказывается самым сложным. Вместо него будем в дальнейшем пользоваться другим, которое получим из (6.31) и (6.32), действуя на (6.31) оператором  $|\nabla a|^{-2} \nabla a \nabla$ , а на (6.32) — оператором  $[\mathbf{B}\nabla a] \nabla$  и вычитая из первого уравнения второе. Используя при этом векторное тождество

$$a \nabla (\mathbf{b} \nabla f) = \mathbf{b} \nabla (a \nabla f) + (a \text{ div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{ div } a - \text{rot } [\mathbf{a}\mathbf{b}]) \nabla f \quad (6.33)$$

для исключения высших производных величин  $T_3$  и  $T_0$ , получаем в результате (вывод см. в приложении 4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \text{div } \rho \frac{[\xi \mathbf{B}]}{B^2} - \frac{\rho'}{B^2} \frac{\rho}{\alpha_S} \eta \right) &= \mathbf{B}\nabla \frac{\nabla a \nabla T_2}{|\nabla a|^2} + \gamma_S \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \nabla T_2 - \\ &- [\mathbf{B}\nabla a] \nabla \frac{K\xi + \mathbf{B}\nabla T_1}{B^2} + T_2 [\mathbf{B}\nabla a] \nabla \frac{\gamma_S - S}{B^2} + 2\rho' T_3 [\mathbf{B}\nabla a] \nabla \frac{1}{B^2} + \\ &+ \frac{\mathbf{B}\nabla T_2}{B^2} \text{div } \alpha_S \nabla a - \frac{\gamma_S}{\alpha_S} \mathbf{B} \left( \nabla T_3 + \frac{1}{B^2} \nabla T_0 \right) - 2 \frac{[\mathbf{B}\mathbf{k}]}{B^2} \nabla T_0. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Здесь использованы традиционные обозначения [109]:

$$\alpha_S \equiv B^2 / |\nabla a|^2; \quad \gamma_S \equiv j\mathbf{B} / |\nabla a|^2. \quad (6.35)$$

Символом  $\mathbf{k}$  обозначен вектор кривизны силовой линии (1.10):

$$\mathbf{k} \equiv \left( \frac{\mathbf{B}}{B} \nabla \right) \frac{\mathbf{B}}{B} = \frac{\nabla (2\rho + B^2)}{2B^2} - \frac{\mathbf{B}}{B^4} (\mathbf{B}\nabla) \frac{B^2}{2},$$

направленный по нормали к силовой линии с модулем  $|\mathbf{k}|$ , равным ее локальной кривизне.

Уравнение (6.34), полученное без предположений о виде смещения, существенно упрощается, если возмущения квазижелобковые или баллонные, а  $T_0 = T_0(a)$  (граница устойчивости). В этом случае в (6.34) достаточно сохранить лишь первые три члена в правой части. Такое укороченное уравнение будем использовать в разд. 6.6 и 6.7.

## 6.2. Энергетический принцип

Три уравнения (6.30), (6.31), (6.32) [или (6.34)] для компонент смещения  $\xi$ , к которым свелись линеаризованные уравнения движения (6.6)—(6.10), могут быть получены и вариационным методом с использованием принципа наименьшего действия [29, 171]

$$\delta \int (T - W) dt = 0, \quad (6.36)$$

где  $T$  — кинетическая энергия движения плазмы:

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 dr, \quad (6.37)$$

а  $W$  — потенциальная энергия:

$$W = -\frac{1}{2} \int \xi \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dr = -\frac{1}{2} \int \xi (-\nabla p_1 + [j_1 \mathbf{B}] + [j \mathbf{B}_1]) dr. \quad (6.38)$$

Действительно, последнее выражение приводится к виду (см. приложение 5)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int \left( T^2 + \frac{T_0^2}{\gamma p} - K \xi^2 \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \int (T_1^2 |\nabla a|^2 + T_2^2 \alpha_S + T_0^2 / \gamma p + T_3^2 B^2 + K \xi^2) dr. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Чтобы получить из (6.36) уравнения малых колебаний, нужно выразить входящие в  $W$  функции  $T_i$  через  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\tau$ . Подставляя (6.29) в (6.15), получаем для них с учетом (6.18)

$$T_1 = \mathbf{B} \nabla \xi / |\nabla a|^2; \quad (6.40)$$

$$T_2 = \frac{1}{\alpha_S} [\mathbf{B} \nabla \eta + (\gamma_S - S) \xi]; \quad (6.41)$$

$$T_3 = \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2} + \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} \nabla \eta + \frac{\xi}{B^2} \left( \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \frac{\Delta a}{|\nabla a|^2} + 2p' \right). \quad (6.42)$$

Отметим, что величина  $T_3$  связана с  $T_0 = \gamma p \operatorname{div} \xi$  соотношением (оно будет использовано при выводе уравнений баллонных мод в разд. 6.7)

$$T_3 = T_0 / \gamma p - \operatorname{div} (\tau \mathbf{B} / B^2) + 2\xi \mathbf{k}. \quad (6.43)$$

Здесь, как и прежде,  $\mathbf{k}$  — кривизна силовой линии.

Пространственные производные функций  $\xi, \eta, \tau$  входят в  $T_0-T_3$  лишь в комбинациях вида  $\mathbf{q}\nabla y$  ( $y = \xi, \eta, \tau$ ), поэтому при варьировании (6.36) для этих функций получаются уравнения:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \operatorname{div} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\mathbf{q}\nabla y)} \mathbf{q} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = 0, \quad (6.44)$$

где  $\dot{y} \equiv \partial y / \partial t$ ;  $\mathcal{L} \equiv k - \omega$ , а  $k$  и  $\omega$  — подинтегральные выражения  $T$  (6.37) и  $W$  (6.39) соответственно. Используя (6.40) — (6.42), легко убедиться, что уравнения (6.44) действительно приводят к уравнениям малых колебаний, полученным в предыдущем разделе.

Важное следствие принципа Гамильтона (6.36) в идеальной МГД — сохранение энергии [29, 168, 169, 171]:

$$W + T = E = \text{const}. \quad (6.45)$$

Нарастание кинетической энергии  $T$  возможно лишь при уменьшении  $W$ . Условием устойчивости, соответствующим ограниченности кинетической энергии, является неотрицательность  $W$ :

$$W \geq 0. \quad (6.46)$$

Согласно (6.39) потенциальная энергия возмущенного состояния  $W$ , которую с учетом определений (6.15) и (6.25) можно привести к виду [166]

$$W = \frac{1}{2} \int \left\{ \left( \mathbf{Q} + \xi \frac{[\nabla a]}{|\nabla a|^2} \right)^2 + \gamma p (\operatorname{div} \xi)^2 - K \xi^2 \right\} dr, \quad (6.47)$$

может стать отрицательной лишь за счет члена  $-K\xi^2$  в подинтегральном выражении. При  $K < 0$  потенциальная энергия заведомо положительна. Условие  $K < 0$  является, таким образом, простейшим достаточным критерием устойчивости плазмы, гарантирующим устойчивость относительно возмущений любого типа.

Ввиду важности величины  $K$  в теории устойчивости в § 6.4 будут даны ее различные представления. Прежде чем перейти к этому рассмотрению, получим ряд вспомогательных соотношений, связывающих различные поверхностные величины, характеризующие равновесную конфигурацию.

### 6.3. Интегральные величины

В теории равновесия важнейшими интегральными соотношениями являются уравнение Крускала — Кульсруда (1.3)

$$p'V' = J'\psi' - F'\Phi'$$

и уравнения связи токов с потоками (2.81)

$$J = -\alpha_{22}^0 \psi' + \alpha_{23}^0 \Phi'; \quad F = -\alpha_{23}^0 \psi' + \alpha_{33}^0 \Phi'.$$

При исследовании устойчивости этих трех уравнений уже недостаточно. Приведем здесь выражения еще пяти интегральных величин.

Вычисление величины  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle$ , где скобками  $\langle \rangle$  обозначено усреднение по объему  $dV$  между близкими магнитными поверхностями

(так называемое микроканоническое усреднение [172])

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{dV} \int f dr = \frac{d}{dV} \int f dr,$$

удобно проводить, используя одновременно токовое (2.23) и потоковое (2.11) представления  $\mathbf{B}$ . Объем интегрирования при усреднении  $\langle \rangle$  ограничен магнитными поверхностями, поэтому в силу  $\mathbf{B}\nabla a=0$

$$\langle \mathbf{B}\nabla f \rangle = \langle \text{div } f\mathbf{B} \rangle = 0, \quad (6.48)$$

где  $f$  — любая периодическая по  $\theta$  и  $\zeta$  функция. Точно так же

$$\langle [\nabla a \nabla g] \nabla f \rangle = \langle \text{div } f [\nabla a \nabla g] \rangle = 0, \quad (6.49)$$

поэтому величины  $\mathbf{B}\nabla\phi$ ,  $J[\nabla a \nabla\theta] \nabla\eta$  и  $F[\nabla a \nabla\zeta] \nabla\eta$ , возникающие при умножении (2.11) на (2.23), не дают вклада в  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle$ . Представляя элемент объема  $dr$  в виде  $dr = ([\nabla a \nabla\theta] \nabla\zeta)^{-1} da d\theta d\zeta$ ; получаем окончательно

$$\langle \mathbf{B}^2 \rangle V' = F\Phi' - J\psi'. \quad (6.50)$$

Аналогично, используя для  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  представления (2.23) и (2.25), получаем

$$\langle \mathbf{jB} \rangle V' = J'F - JF'. \quad (6.51)$$

Отметим, что и уравнение Крускала — Кульсруда получается точно таким же усреднением уравнения  $p'(a) = [\mathbf{jB}] \nabla a / |\nabla a|^2$  с  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{B}$  в виде (2.25) и (2.11) соответственно.

В теории устойчивости тороидальных систем, кроме  $\langle \mathbf{B}^2 \rangle$  и  $\langle \mathbf{jB} \rangle$ , фигурируют и такие величины, как глобальный шир  $\Lambda \equiv \langle S \rangle$  [ $S$  — величина (6.24)], характеризующий скорость изменения вращательного преобразования  $\mu(a) = -\psi'/\Phi'$ , и величины  $\omega \equiv 2p + \langle \mathbf{B}^2 \rangle$  [59] и

$$\Omega \equiv \frac{1}{V'} (-p'V'' + J'\psi'' - F'\Phi''), \quad (6.52)$$

характеризующие магнитную яму.

Используя потоковое представление  $\mathbf{B}$  (2.11), легко показать, что

$$\Lambda \equiv \langle S \rangle = (\Phi''\psi' - \psi''\Phi')/V' = \mu'\Phi'/V'. \quad (6.53)$$

Действительно, согласно (2.11)

$$\mathbf{B} = [\nabla a \mathbf{u}], \quad 2\mu = \Phi'\nabla\theta + \psi'\nabla\zeta + \nabla\eta. \quad (6.54)$$

Подставляя в таком виде  $\mathbf{B}$  под знак  $\text{rot}$  в (6.24), прямым вычислением получаем

$$S = \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \text{rot } \mathbf{u} - \mathbf{B}\nabla \frac{u\nabla a}{|\nabla a|^2}. \quad (6.55)$$

Преобразуем первый член в этом выражении, используя явный вид  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{B}$  (6.54):

$$\frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \text{rot } \mathbf{u} = -\mathbf{B}\mathbf{u}' = \frac{1}{4\pi^2} (\Phi''\psi' - \psi''\Phi') [\nabla a \nabla \theta] \nabla \zeta - \frac{1}{2\pi} \mathbf{u}' [\nabla a \nabla \eta], \quad (6.56)$$

где

$$2\pi\mathbf{u}' \equiv \Phi''\nabla\theta + \psi''\nabla\zeta. \quad (6.57)$$

Функции  $\mathbf{u}\nabla a$  и  $\eta$  периодичны по  $\theta$  и  $\zeta$ , поэтому при усреднении  $S$  последний член в (6.55) и слагаемое  $\mathbf{u}'[\nabla a \nabla \eta]$  исчезают [см. (6.48) и (6.49)]; в результате получаем (6.53).

Введенные поверхностные величины  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $\Lambda$ , как нетрудно показать прямым вычислением, связаны соотношением

$$p'^2 + \langle \mathbf{B}^2 \rangle \Omega = p'\omega' - \langle \mathbf{jB} \rangle \Lambda. \quad (6.58)$$

Входящая сюда производная функции  $\omega(a)$  может быть с учетом (6.50) и уравнения Крускала — Кульсруда выражена через токи  $J$ ,  $F$ , потоки  $\Phi$ ,  $\psi$  и производную объема  $V'(a)$ , заключенного внутри магнитной поверхности  $a = \text{const}$ :

$$\omega' \equiv (2p + \langle \mathbf{B}^2 \rangle)' = \left( \frac{JV'}{\psi'} \right)' \left( \frac{\psi'}{V'} \right)^2 - \left( \frac{FV'}{\Phi'} \right)' \left( \frac{\Phi'}{V'} \right)^2. \quad (6.59)$$

Полученные выражения использованы в § 6.4—6.6.

#### 6.4. Различные представления источника неустойчивостей $K$

Входящие в (6.28) величины  $S$  (6.24) и  $\mathbf{jB}$  можно, используя уравнения Максвелла и условие  $\mathbf{B}\nabla a = 0$ , представить в виде

$$S = \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \frac{(\nabla a \nabla) \mathbf{B} - (\mathbf{B}\nabla) \nabla a}{|\nabla a|^2}; \quad (6.60)$$

$$\mathbf{jB} = [\mathbf{j}\nabla a] \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} = \{(\mathbf{B}\nabla) \nabla a + (\nabla a \nabla) \mathbf{B}\} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2}. \quad (6.61)$$

В последнем выражении использовано тождество

$$[\nabla a] = [\nabla a \text{ rot } \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \text{ rot } \nabla a] = \nabla (\mathbf{B}\nabla a) + (\nabla a \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B}\nabla) \nabla a.$$

Здесь учтено, что  $\text{rot } \nabla a \equiv 0$ ,  $\mathbf{B}\nabla a = 0$ .

Уравнения (6.60) и (6.61) совместно со следствием уравнения равновесия (1.8)

$$\nabla a \nabla (2p + \mathbf{B}^2) = 2\nabla a (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{B} \quad (6.62)$$

позволяют привести  $K$  (6.28) к виду (удобному для случая  $\mathbf{jB} = 0$ ), явно показывающему источники возможной неустойчивости — градиент давления  $\nabla p$  и продольный ток  $\mathbf{jB}$ :

$$K = \frac{2(\mathbf{B}\nabla) \nabla a}{\mathbf{B}^2 |\nabla a|^4} \{(\mathbf{jB}) [\mathbf{B}\nabla a] - p' |\nabla a|^2 \mathbf{B}\}. \quad (6.63)$$

В токамаке продольный ток приводит к наиболее опасным крупномасштабным неустойчивостям. В стеллараторе продольный ток — это вторичный ток, пропорциональный градиенту давления и кривизне оси, поэтому оба источника сводятся к одному — градиенту давления.

Легко убедиться, используя равенство  $p'|\nabla a|^2 = \mathbf{j}[\mathbf{B}\nabla a]$ , что фигурная скобка в (6.63) равна  $\mathbf{B}^2[\mathbf{j}\nabla a]$ , таким образом

$$K = 2 \frac{[j\nabla a]}{|\nabla a|^2} \frac{(\mathbf{B}\nabla) \nabla a}{|\nabla a|^2}. \quad (6.64)$$

Это выражение для  $K$ , часто используемое при анализе устойчивости тороидальных конфигураций, впервые было приведено в [166].

Еще два представления  $K$  получаем, умножая (6.22) на  $[\mathbf{B}\nabla a]/|\nabla a|^2$ , (6.23) на  $[\mathbf{j}\nabla a]/|\nabla a|^2$  и подставляя получившиеся при этом выражения  $\alpha S$  в (6.27) и (6.28) соответственно:

$$K = \frac{j^2}{|\nabla a|^2} + p'' - \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2} \operatorname{rot} \frac{[j\nabla a]}{|\nabla a|^2}; \quad (6.65)$$

$$K = \frac{j^2}{|\Delta a|^2} - p' \operatorname{div} \frac{\nabla a}{|\Delta a|^2} - \frac{[j\nabla a]}{|\nabla a|^2} \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{|\nabla a|^2}. \quad (6.66)$$

Отметим, что (6.65) и (6.66) можно легко свести одно к другому, используя векторное тождество  $\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} = \operatorname{div}[\mathbf{b}\mathbf{a}] + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}$ .

Получим еще одно полезное представление  $K$ , преобразуя в (6.65) последний член. Очевидно, его можно записать в виде (6.56), заменив  $\mathbf{u}$  вектором

$$\mathbf{w} \equiv \frac{1}{2\pi} (J' \nabla \theta + F' \nabla \zeta + \nabla v), \quad (6.67)$$

поскольку согласно (2.25)

$$\mathbf{j} = [\nabla a \mathbf{w}]. \quad (6.68)$$

Среднее по объему значение величины  $K - j^2/|\nabla a|^2$  вычисляется теперь так же, как и  $\langle S \rangle$  в предыдущем разделе; в результате получаем

$$K = j^2/|\nabla a|^2 + \Omega(a) + \mathbf{B}\nabla \tilde{k}, \quad (6.69)$$

где  $\Omega$  — величина (6.52), а  $\mathbf{B}\nabla \tilde{k}$  — переменная часть разности  $K - j^2/|\nabla a|^2$ . Функцию  $\tilde{k}$  вычисляем, используя представления (2.11) и (2.25) для  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{j}$  (см. приложение 6):

$$\tilde{k} = \frac{v}{2\pi p'} (\Omega - p'') + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{[j\nabla a]}{|\nabla a|^2} \mathbf{e}_1 + \frac{J''F' - J'F''}{2\pi p'V'} \eta. \quad (6.70)$$

Как следует из ее определения (6.69),  $\tilde{k}$  не зависит от выбора системы координат, хотя взятые отдельно входящие в  $\tilde{k}$  слагаемые неинвариантны. Выражение (6.70) удобно использовать при работе в потоковой системе координат. При специальном выборе угловых переменных  $\theta, \zeta$  оно упрощается: в системе координат с ВСЛ  $\eta = 0$ ; в системе координат Хамады  $\eta = 0$  и  $\mathbf{v} = 0$ , но при этом сложным

становится вычисление вектора  $e_1$ , который в системе координат Хамады может сильно отличаться от  $\nabla a/|\nabla a|^2$ .

Отметим, что полученное представление  $K$  можно привести к виду

$$K = \frac{(\mathbf{jB})^2}{B^2 |\nabla a|^2} - \frac{\langle \mathbf{jB} \rangle}{\langle B^2 \rangle} \Lambda + \frac{p'}{\langle B^2 \rangle} \left[ \omega' + p' \left( \frac{\langle B^2 \rangle}{B^2} - 1 \right) \right] + \mathbf{B} \nabla \tilde{k}, \quad (6.71)$$

исключая из (6.69)  $\Omega$  с помощью (6.58) и  $\mathbf{j}^2 : \mathbf{j}^2 B^2 = [\mathbf{jB}]^2 + (\mathbf{jB})^2$ .

### 6.5. Достаточные критерии устойчивости

Как уже отмечалось в § 6.2, простейшим формальным достаточным критерием устойчивости является

$$K < 0. \quad (6.72)$$

Для конфигурации с одним только поперечным током ( $\mathbf{jB} = 0$ ) для устойчивости достаточно, как видно из (6.63), чтобы силовая линия была выгнута в сторону увеличения давления:  $\nabla p(\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} < 0$ , где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ . Этому условию удовлетворяют конфигурации остроконечной геометрии типа «антипробкотрон».

Применим теперь достаточное условие устойчивости (6.72) к цилиндрически симметричному плазменному шнуру ( $\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0$ ). В этом случае  $\mathbf{jB} = \langle \mathbf{jB} \rangle$ ,  $B^2 = \langle B^2 \rangle$ ,  $\mathbf{B} \nabla \tilde{k} = 0$ , а для двух других величин,  $\Lambda$  и  $\omega'$ , входящих в выражение (6.71) для  $K$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= r B_z^2 (B_\varphi / r B_z)' = \mathbf{jB} - 2 B_\varphi B_z / r; \\ \omega' &= -2 B_\varphi^2 / r. \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

Таким образом, для цилиндра

$$K_{\text{цил}} = (2/r) j_z B_\varphi, \quad (6.74)$$

достаточное условие устойчивости (6.72) сводится к критерию Розенблюта [92]  $j_z B_\varphi < 0$ . В обычном  $z$ -пинче, где поле  $B_\varphi$  создается током  $j_z$ , условие устойчивости не выполняется:  $j_z B_\varphi > 0$ . Если же внутри плазменного шнура с током  $j_z$  поместить жесткий проводник с током обратного направления, то суммарное магнитное поле  $B_\varphi$  может стать отрицательным. Таким образом, в системах с жестким сердечником достаточное условие гидромагнитной устойчивости может быть удовлетворено. В обычных токамаках и стеллараторах без продольного тока критерий (6.72) не выполняется [60]: в токамаке он сводится к  $j_z B_\theta < 0$ , а для стелларатора главный член в  $K$  знакпеременен; он пропорционален  $p' k \cos \theta$ , где  $k$  — кривизна оси.

Отметим, что критерий (6.72) представляет собой частный случай достаточного критерия устойчивости Лили [173]

$$\int \xi^2 K dr < 0, \quad (6.75)$$

который получается отбрасыванием в  $W$  (6.39) неотрицательных слагаемых  $\sim T_i^2$ . Критерий Лили исследовался в [174], где из не-

го для токамака с большим аспектным отношением и с малым  $\beta$  был получен критерий устойчивости относительно специального класса возмущений, минимально искривляющих силовые линии.

Функционал (6.47) можно преобразовать так, что в подынтегральном выражении единственное слагаемое ( $\sim \xi^2$ ), которое может быть отрицательным, изменится. В результате получится новый достаточный критерий устойчивости, аналогичный (6.72), но менее жесткий.

Преобразование  $W$  начнем с того, что в (6.47)  $\nabla a / |\nabla a|^2$  представим в виде суммы двух произвольных векторов

$$\nabla a / |\nabla a|^2 = \mathbf{g} - \mathbf{h}, \quad (6.76)$$

наложив единственное ограничение на  $\mathbf{h}$ :  $\mathbf{h} \nabla a = 0$ . Выделяя теперь в (6.47) слагаемое  $(\mathbf{Q} + \xi [\mathbf{jg}])^2$ , а два других преобразуя по формулам

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{jh}] [\mathbf{jg}] &= [\mathbf{jh}] \mathbf{j} \cdot \left[ \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + \mathbf{h} \right] = [\mathbf{jh}]^2; \\ [\mathbf{jh}] \mathbf{Q} &= \text{div} [ [\xi \mathbf{B}] [\mathbf{jh}] ] + [\xi \mathbf{B}] \text{rot} [\mathbf{jh}] = X \mathbf{B} \nabla \xi, \end{aligned} \right\} \quad (6.77)$$

где вследствие  $\mathbf{j} \nabla a = 0$  и  $\mathbf{h} \nabla a = 0$

$$[\mathbf{jh}] \equiv X \nabla a, \quad (6.78)$$

получаем новое представление  $W$ :

$$W = (1/2) \int \{ (\mathbf{Q} + \xi [\mathbf{jg}])^2 + \gamma p (\text{div} \xi)^2 - \xi^2 (K + X^2 |\nabla a|^2 - \mathbf{B} \nabla X) \} dr. \quad (6.79)$$

Член  $\xi X \mathbf{B} \nabla \xi$  в подынтегральном выражении преобразован с помощью формулы  $\int X \mathbf{B} \nabla \xi^2 dr = - \int \xi^2 \mathbf{B} \nabla X dr$ .

Теперь можно написать новый достаточный критерий устойчивости, обобщающий критерий Лили (6.75)

$$\int \xi^2 (K + X^2 |\nabla a|^2 - \mathbf{B} \nabla X) dr < 0 \quad (6.80)$$

или критерий, аналогичный (6.72),

$$K + X^2 |\nabla a|^2 - \mathbf{B} \nabla X < 0. \quad (6.81)$$

Достаточный критерий устойчивости в виде (6.81) был впервые получен в [132], в [127] дано его обобщение на случай анизотропной плазмы. В отличие от (6.72) он содержит дестабилизирующий член  $X^2 |\nabla a|^2$  и член  $\mathbf{B} \nabla X$ , который при определенном выборе функции  $X$  может быть стабилизирующим.

Функция  $X$  в (6.81) произвольна. Вопрос о ее оптимальном выборе рассматривался в [132]. Не останавливаясь на его обсуждении, покажем, как из (6.81) получается достаточный критерий устойчивости Соловьева [30].

Легко проверить (разложением по степеням  $\rho$ ), что в окрестности магнитной оси главным членом в  $K$  является  $\mathbf{B} \nabla \bar{k}$  [см. (6.69)]. Естественно попытаться выбором  $X$  уничтожить эту большую знакопеременную величину в критерии (6.81). Это можно сделать, по-



лагая  $X = \tilde{k}$ . Достаточный критерий устойчивости при этом принимает вид

$$j^2 / |\nabla a|^2 + \Omega + \tilde{k}^2 |\nabla a|^2 < 0 \quad (6.82)$$

[мы воспользовались выражением (6.69) для величины  $K$ ].

Функцию  $\tilde{k}$  согласно (6.70) можно записать как

$$\tilde{k} = [j e_H] \nabla a / |\nabla a|^2, \quad (6.83)$$

где  $e_H = \sqrt{g_H} \nabla \theta_H \nabla \zeta_H$  — базисный вектор системы координат Хамады ( $\eta=0$ ,  $\nu=0$ ). С учетом (6.83) критерий (6.82) может быть записан в виде, полученном впервые Соловьевым [30]:

$$\Omega + [j e_H]^2 < 0. \quad (6.84)$$

Переход от (6.82) к (6.84) осуществляется с помощью векторного тождества

$$b^2 |\nabla a|^2 = [b \nabla a]^2 + (b \nabla a)^2.$$

Выражая  $\Omega$  с помощью (6.69) и (6.71), получаем критерий (6.82) в физически более наглядной форме

$$\frac{(jB)^2}{B^2 |\nabla a|^2} - \frac{\langle jB \rangle}{\langle B^2 \rangle} \Lambda + \frac{\rho'}{\langle B^2 \rangle} \left[ \omega' + \rho' \left( \frac{\langle B^2 \rangle}{|B^2|} - 1 \right) \right] + \tilde{k}^2 |\nabla a|^2 < 0. \quad (6.85)$$

Известно, что достаточный критерий Соловьева оказывается содержательным для бестоковых стеллараторов [60]. Для исследования таких систем удобно выразить величину  $[j e_H]$  в (6.84) через интегральные токи. Учитывая, что в координатах Хамады вектор плотности тока  $j$  представляется в виде (2.54), легко получить

$$[j e_H] = \frac{1}{2\pi} (J' \nabla \theta_H + F' \nabla \zeta_H). \quad (6.86)$$

Эта формула позволяет записать (6.84) при равном нулю продольном токе  $J$  в виде

$$\Omega + (1/4\pi^2) F'^2 |\nabla \zeta_H|^2 < 0. \quad (6.87)$$

Во втором члене переменная по  $\theta$  часть в  $kb$  (обратное аспектное отношение) раз меньше, чем не зависящая от  $\theta$ . Это и позволяет удовлетворить достаточный критерий устойчивости при некоторых конечных значениях  $\beta$ .

Для бестоковой плазмы можно произвести дальнейшее упрощение достаточного критерия. При  $J=0$  ток  $F$  явно выражается через давление  $p$  из уравнения Крускала — Кульсруда (1.3):  $F' = -\rho' V' / \Phi'$ . В этом случае

$$\Omega = -\rho' V'' (\Phi) \Phi'^2 / V' \quad (6.88)$$

и (6.87) сводится при  $\rho' < 0$  к

$$-\frac{|V''(\Phi)|}{V'(\Phi)} + \frac{1}{4\pi^2} \rho'(\Phi) V'^2(\Phi) |\nabla \zeta_H|^2 > 0. \quad (6.89)$$

Еще одну формулировку этого критерия можно получить, выражая  $\Omega$  из (6.58), где при  $J=0$  следует положить согласно (6.51)  $\langle \mathbf{j}\mathbf{B} \rangle = 0$ , и  $F'$  из (1.3) и (6.50):

$$F' = -\rho' F / \langle \mathbf{B}^2 \rangle. \quad (6.90)$$

После подстановки этих выражений в (6.87) и сокращения общего отрицательного множителя  $\rho' / \langle \mathbf{B}^2 \rangle$  достаточный критерий устойчивости сводится к

$$\omega' - \rho' \left[ 1 - \frac{1}{4\pi^2} \frac{F^2}{\langle \mathbf{B}^2 \rangle} |\nabla \zeta_H|^2 \right] > 0. \quad (6.91)$$

## 6.6. Вывод критерия Мерсье

Критерий Мерсье [24—29] — один из важнейших, часто используемых результатов теории МГД-устойчивости плазмы. Его значимость в теории определяется его универсальностью: он является общегеометрическим (применим к любым тороидальным системам с широм) и не требует при выводе ограничений на  $\beta$ , токи и поля. Основное условие его применимости — наличие шира.

Критерий Мерсье дает границу устойчивости относительно специального класса возмущений, компоненты  $\xi$ ,  $\eta$  которых удовлетворяют соотношениям

$$\frac{|\mathbf{B}\nabla X|}{B} \ll \frac{|X|}{b} \ll \frac{|[\mathbf{B}\nabla a] \nabla X|}{B |\nabla a|} \ll \frac{|\nabla a \nabla X|}{|\nabla a|}. \quad (6.92)$$

Для таких квазижелобковых возмущений (как иногда говорят — типа Мерсье), вытянутых вдоль силовых линий и мелкомасштабных поперек  $\mathbf{B}$ , уравнения (6.31) и (6.34), полученные без предположения о виде функций  $\xi$ ,  $\eta$ , сводятся при  $\omega \rightarrow 0$  и соответственно  $T_0 = 0$  [см. (6.30)] к системе

$$T_3 = 0; \quad (6.93)$$

$$\mathbf{B}\nabla \frac{\nabla a T_2}{|\nabla a|^2} + \gamma_S \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \nabla T_2 - K \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \nabla \xi = 0. \quad (6.94)$$

При выводе критерия Мерсье обычно используют потоковую систему координат в ВСЛ. Мы проведем вычисления в общем виде, пользуясь только свойствами дифференциальных операторов и потоковым представлением (2.11) поля  $\mathbf{B}$ , которое может быть записано как

$$\mathbf{B} = (\Phi'/2\pi) [\nabla a \nabla u], \quad (6.95)$$

где

$$u = \theta - \mu \zeta + \eta / \Phi'; \quad (6.96)$$

$\theta$  и  $\zeta$  — углы произвольной потоковой системы координат.

Функция  $u(\mathbf{r})$  постоянна вдоль силовых линий, поэтому квазижелобковые возмущения можно представить в виде

$$X = \exp(imu_0) [X_0(a) + X_1(a, \theta, \zeta)], \quad (6.97)$$

где  $|X_1| \ll |X_0|$ ;  $u_0 = u(a_0)$ ;  $a_0$  — метка «резонансной» поверхности:  $\mu(a_0) = n/m$ . Для выполнения всех трех условий (6.92) следует еще потребовать

$$m \gg 1; \quad x_0/b \ll 1; \quad mx_0/b \ll 1, \quad (6.98)$$

где  $x_0$  и  $b$  — характерные масштабы по  $a$ , на которых заметно меняются  $\xi$ ,  $\eta$  и равновесные величины соответственно.

При решении уравнений (6.93) и (6.94) понадобятся две простые вспомогательные формулы:

$$[\mathbf{B}\nabla a] \nabla u = (2\pi/\Phi') \mathbf{B}^2; \quad (6.99)$$

$$\mathbf{B}\nabla u_0 = 2\pi (x/\Phi') S. \quad (6.100)$$

Здесь  $x = a - a_0$  — расстояние по  $a$  от резонансной поверхности  $a = a_0$ ;  $S$  — величина, определяемая формулой (6.24). Обе формулы являются следствием (6.95). Последнее соотношение, справедливое в малой окрестности поверхности  $a = a_0$ , легко получается из уравнения  $\mathbf{B}\nabla u = 0$  при подстановке в него  $u$  в виде

$$u = u_0 + \left( \frac{\nabla a \nabla u}{|\nabla a|^2} \right)_0 x. \quad (6.101)$$

Переходим к решению уравнений (6.93) и (6.94). Из первого уравнения, которое в силу (6.42) и (6.92) может быть записано как

$$\frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2} + \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{\mathbf{B}^2} \nabla \eta = 0, \quad (6.102)$$

определяем  $\eta$ :

$$\eta = \frac{i}{m} \frac{\Phi'}{2\pi} \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2}. \quad (6.103)$$

Величина  $T_2$  (6.41), входящая в (6.94), теперь может быть выражена через  $\xi$ :

$$T_2 = \frac{1}{\alpha_S} \left[ \frac{i}{m} \frac{\Phi'}{2\pi} \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2} (\mathbf{B}\nabla \xi) + \gamma_S \xi \right]. \quad (6.104)$$

Мы воспользовались здесь тождеством (6.33) и сохранили лишь основные члены.

Оставшееся уравнение (6.94), служащее для определения  $\xi$ , запишем в виде

$$\mathbf{B}\nabla \frac{\partial f}{\partial a} + i m \frac{\partial f}{\partial a} \mathbf{B}\nabla u_0 + i \frac{2\pi m}{\Phi'} (\gamma_S f - K \xi_0) = 0, \quad (6.105)$$

где  $f = T_2 \exp(-im u_0)$ . Основным в этом уравнении является первое слагаемое, остальные малы в силу предположения (6.98). Поэтому в низшем приближении (6.105) сводится к

$$\mathbf{B}\nabla f_0^* = 0. \quad (6.106)$$

Следовательно,  $f_0 = f_0(a)$ . Усредняя теперь уравнение (6.105) по слою между близкими магнитными поверхностями, получаем

уравнение, содержащее только  $f_0$  и  $\xi_0(a)$ :

$$f_0' \langle \mathbf{B} \nabla u_0 \rangle + (2\pi/\Phi') (\langle \gamma_S \rangle f_0 - \langle K \rangle \xi_0) = 0. \quad (6.107)$$

Величина  $\langle \mathbf{B} \nabla u_0 \rangle$  в отличие от  $\langle \mathbf{B} \nabla \partial f / \partial a \rangle$  не равна нулю, поскольку  $u_0$  — многозначная (непериодическая) функция. Из (6.100) и (6.53) следует

$$\langle \mathbf{B} \nabla u_0 \rangle = 2\pi \mu' \Phi' / V'. \quad (6.108)$$

Выразим входящую в (6.107) функцию  $f_0$  через  $\xi_0$ . Из (6.104) следует

$$\alpha_S f_0 = \frac{i \Phi'}{2\pi m} \mathbf{B} \nabla \frac{\partial \xi_1}{\partial a} - S \frac{d}{da} (x \xi_0) + \gamma_S \xi_0. \quad (6.109)$$

Здесь сохранены лишь члены одного порядка. Усредняя это уравнение по  $dV$ , избавляемся от  $\xi_1$ :

$$f_0 = -\mu' \frac{\Phi'^2}{V'} \frac{1}{\langle \alpha_S \rangle} \frac{d}{da} (x \xi_0) + \frac{\langle \gamma_S \rangle}{\langle \alpha_S \rangle} \xi_0. \quad (6.110)$$

Подставляя  $f_0$  в (6.107), получаем окончательно уравнение для  $\xi_0$ :  $\mu'^2 x (x \xi_0)'' - (V'^2/\Phi'^4) \{ \langle \gamma_S \rangle^2 - \langle K \rangle \langle \alpha_S \rangle - \mu' \langle \gamma_S \rangle \Phi'^2/V' \} \xi_0 = 0$ , (6.111) к которому свелись уравнения малых колебаний (6.93) и (6.94). Полученное уравнение имеет решение без особенности в нуле, если

$$(\mu'/2 - \langle \gamma_S \rangle V'/\Phi'^2)^2 - (V'^2/\Phi'^2) \langle \alpha_S \rangle \langle K \rangle > 0. \quad (6.112)$$

Это условие и является критерием Мерсье. Мы получили его как необходимое условие устойчивости плазмы относительно квазижелебковых возмущений. Легко проверить (см., например, [29]), что при выполнении (6.112) функционал энергии для возмущений типа (6.97) положителен. Это означает, что критерий Мерсье является также и достаточным условием устойчивости для квазижелебковых возмущений.

## 6.7. Вывод уравнений баллонных мод

Баллонными называются коротковолновые в поперечном к  $\mathbf{B}$  и длинноволновые в продольном направлении возмущения, которые в отличие от желобковых не являются почти постоянными вдоль силовой линии. Такие возмущения удовлетворяют условиям:

$$\frac{|\nabla a \nabla X|}{|\nabla a|}, \frac{|[\mathbf{B} \nabla a] \nabla X|}{B |\nabla a|} \gg \frac{|X|}{b}, \frac{|\mathbf{B} \nabla X|}{B}, \quad (6.113)$$

где  $b$  — характерный поперечный размер плазменного шнура, поэтому их удобно представлять в эйкональной форме [35]:

$$\xi = \hat{\xi}(\mathbf{r}) \exp \left[ \frac{i}{\varepsilon} \hat{S}(\mathbf{r}) - i \omega t \right], \quad (6.114)$$

полагая  $\varepsilon \ll 1$ ,  $b |\nabla \hat{S}| \sim O(1)$ ,  $b |\nabla \hat{\xi}_i| \sim O(\hat{\xi}_i)$ ,  $\mathbf{B} \mathbf{k}_\perp = 0$ , где

$$\mathbf{k}_\perp \equiv \nabla \hat{S}. \quad (6.115)$$

Условия (6.113) при этом выполняются за счет малости  $\epsilon$ .

Малость  $\epsilon$  позволяет упростить уравнения малых колебаний (6.30), (6.31), (6.34). Входящие в них величины  $T_i$  после подстановки в (6.25), (6.40)–(6.42)  $\xi$  в виде (6.114) принимают вид  $T_i = \hat{T}_i \exp \left[ \frac{i}{\epsilon} \hat{S} - i\omega t \right]$ , где

$$\hat{T}_0 = \gamma p \left( \operatorname{div} \hat{\xi} + \frac{i}{\epsilon} \mathbf{k}_\perp \hat{\xi} \right); \quad (6.116)$$

$$\hat{T}_1 = \mathbf{B} \nabla \hat{\xi} / |\nabla a|^2; \quad (6.117)$$

$$\hat{T}_2 = (1/\alpha_S) [\mathbf{B} \nabla \hat{\eta} + (\gamma_S - S) \hat{\xi}]; \quad (6.118)$$

$$\begin{aligned} \hat{T}_3 &= \frac{i}{\epsilon} \mathbf{k}_\perp \hat{\xi} + \frac{\nabla a \nabla \hat{\xi}}{|\nabla a|^2} + \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{\mathbf{B}^2} \nabla \hat{\eta} + \frac{\hat{\xi}}{\mathbf{B}^2} \left( 2p' + \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} \right) = \\ &= \frac{\hat{T}_0}{\gamma p} - \operatorname{div} \hat{\tau} \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} + 2\hat{\xi} \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Из уравнения (6.31), которое теперь сводится к

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 \frac{|\nabla a|^2}{\mathbf{B}^2} \hat{\eta} &= \frac{i}{\epsilon} k_{\perp \beta} (\hat{T}_0 + \mathbf{B}^2 \hat{T}_3) + \\ &+ \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{\mathbf{B}^2} \nabla \hat{T}_0 + \mathbf{B} \nabla \hat{T}_2 + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \hat{T}_3, \end{aligned} \quad (6.120)$$

где использовано обозначение

$$k_{\perp \beta} \equiv \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{\mathbf{B}^2} \mathbf{k}_\perp, \quad (6.121)$$

получаем, опуская члены порядка  $\epsilon$ ,

$$\hat{T}_0 + \mathbf{B}^2 \hat{T}_3 = 0, \quad (6.122)$$

что с учетом связи  $\hat{T}_3$  с  $\hat{T}_0$  (6.119) приводит к

$$\hat{T}_0 = \frac{\gamma p \mathbf{B}^2}{\gamma p + \mathbf{B}^2} \left( \operatorname{div} \hat{\tau} \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} - 2\hat{\xi} \mathbf{k} \right). \quad (6.123)$$

Подставляя сюда явное выражение  $\hat{T}_0$  (6.116), получаем с точностью до членов порядка  $\epsilon$

$$\mathbf{k}_\perp \hat{\xi} = 0. \quad (6.124)$$

Это условие позволяет с нужной для дальнейших вычислений точностью выразить  $\hat{T}_0$  через две компоненты вектора  $\hat{\xi}$  [вместо трех в (6.123)]:

$$\hat{T}_0 = -\mathbf{B}^2 \hat{T}_3 = \frac{\gamma p \mathbf{B}^2}{\gamma p + \mathbf{B}^2} \left( \operatorname{div} \hat{\tau} \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} - 2\hat{\xi} \frac{[\mathbf{B} \mathbf{k}] \mathbf{k}_\perp}{\mathbf{B}^2 k_{\perp \beta}} \right). \quad (6.125)$$

Здесь мы воспользовались следствием (6.124)

$$\hat{\xi}_\perp = \hat{\xi} [\mathbf{k}_\perp \mathbf{B}] / (\mathbf{B}^2 k_{\perp \beta}). \quad (6.126)$$

Вычислив  $\hat{T}_0$  и  $\hat{T}_3$ , можно теперь упростить уравнение малых колебаний (6.34). Поскольку согласно (6.125) и (6.116) — (6.119) все величины  $T_i$ , входящие в (6.34), одного порядка по  $\epsilon$  —  $O(\epsilon^0)$ , сохраним в этом уравнении лишь члены (порядка  $\epsilon^{-1}$ ), содержащие дифференцирование  $T_i$  и  $\xi$  в поперечном к  $\mathbf{B}$  направлении:

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \frac{\rho}{B^2} [\mathbf{B}\hat{\xi}] = \mathbf{B}\nabla \frac{\nabla a \nabla T_2}{|\nabla a|^2} + \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \nabla T_2 - \\ - [\mathbf{B}\nabla a] \nabla \frac{K\hat{\xi} + \mathbf{B}\nabla T_1}{B^2} - 2 \frac{[\mathbf{B}k]}{B^2} \nabla T_0. \quad (6.127)$$

Разделив (6.127) на  $i\epsilon^{-1}k_{\perp\beta} \exp[i\epsilon^{-1}\hat{S} - i\omega t]$ , придем к уравнению, содержащему  $\hat{\xi}$ ,  $\hat{\tau}$  и  $\hat{T}_2$ :

$$\rho\omega^2 \frac{k_{\perp}^2}{B^2 k_{\perp\beta}^2} \hat{\xi} = \frac{1}{k_{\perp\beta}} \mathbf{B}\nabla \left( \frac{k_{\perp} \nabla a}{|\nabla a|^2} \hat{T}_2 \right) + \\ + \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \hat{T}_2 - K\hat{\xi} - \mathbf{B}\nabla \frac{\mathbf{B}\nabla \hat{\xi}}{|\nabla a|^2} - 2 \frac{[\mathbf{B}k]k_{\perp}}{B^2 k_{\perp\beta}} \hat{T}_0. \quad (6.128)$$

Нетрудно показать, используя векторное тождество (6.38) и условие  $\mathbf{B}\nabla \hat{S} = 0$ , что

$$\mathbf{B}\nabla k_{\perp\beta} = \mathbf{B}\nabla \left( \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \nabla \hat{S} \right) = 0. \quad (6.129)$$

Аналогично можно получить с учетом (6.23):

$$\mathbf{B}\nabla \frac{k_{\perp} \nabla a}{|\nabla a|^2} = \mathbf{B}\nabla \frac{\nabla a \nabla \hat{S}}{|\nabla a|^2} = -S k_{\perp\beta}, \quad (6.130)$$

где  $S$  — величина, определенная равенством (6.24). С помощью этих соотношений и с учетом связи

$$\hat{\eta} = -\hat{\xi} k_{\perp} \nabla a / (|\nabla a|^2 k_{\perp\beta}), \quad (6.131)$$

вытекающей из (6.126) (следствие  $k_{\perp} \hat{\xi} = 0$ ), величина  $\hat{T}_2$ , входящая в уравнение (6.128), может быть выражена через  $\hat{\xi}$  и равновесные параметры конфигурации:

$$\hat{T}_2 = \frac{j\mathbf{B}}{B^2} \hat{\xi} - \frac{k_{\perp} \nabla a}{B^2 k_{\perp\beta}} \mathbf{B}\nabla \hat{\xi}. \quad (6.132)$$

Используя теперь равенство

$$\frac{1}{k_{\perp\beta}} \mathbf{B}\nabla \left( \frac{k_{\perp} \nabla a}{|\nabla a|^2} \frac{j\mathbf{B}}{B^2} \hat{\xi} \right) = -\frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \hat{T}_2 + \frac{j\mathbf{B}}{B^2} \left( \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} - S \right) \hat{\xi} + \\ + 2\rho' \hat{\xi} \frac{[\mathbf{B}\nabla a]}{B^2} \mathbf{k} \frac{(k_{\perp} \nabla a)}{|\nabla a|^2 k_{\perp\beta}}, \quad (6.133)$$

которое легко проверить, используя (6.129), (6.130) и следствие уравнения равновесия  $\nabla p = [jB]$

$$\mathbf{B} \nabla \frac{jB}{B^2} = 2\rho' \frac{[B \nabla a]}{B^2} \mathbf{k}, \quad (6.134)$$

получаем из (6.128)

$$\rho \omega^2 \frac{k_{\perp}^2}{B^2 k_{\perp \beta}^2} = 2\rho' \widehat{\xi} \frac{B [k_{\perp} k]}{B^2 k_{\perp \beta}} - 2 \frac{[Bk] k_{\perp}}{B^2 k_{\perp \beta}} \widehat{T}_0 - \mathbf{B} \nabla \left( \frac{k_{\perp}^2}{k_{\perp \beta}^2 B^2} \mathbf{B} \nabla \widehat{\xi} \right). \quad (6.135)$$

Из последнего уравнения малых колебаний (6.30) следует

$$\rho \omega^2 \widehat{\tau} = \mathbf{B} \nabla \widehat{T}_0. \quad (6.136)$$

Подставляя  $\widehat{T}_0$  (6.125) в уравнения (6.135) и (6.136), получаем окончательно два уравнения баллонных мод для функций  $\widehat{\xi}$  и  $\widehat{\tau}$ :

$$\rho \omega^2 \frac{k_{\perp}^2}{B^2 k_{\perp \beta}^2} \widehat{\xi} = - \mathbf{B} \nabla \left( \frac{k_{\perp}^2}{B^2 k_{\perp \beta}^2} \mathbf{B} \nabla \widehat{\xi} \right) - 2 \frac{[Bk] k_{\perp}}{B^2 k_{\perp \beta}} \left\{ \rho' \widehat{\xi} + \frac{\gamma \rho B^2}{\gamma \rho + B^2} \left( \operatorname{div} \widehat{\tau} \frac{B}{B^2} - 2 \widehat{\xi} \frac{[Bk] k_{\perp}}{B^2 k_{\perp \beta}} \right) \right\}; \quad (6.137)$$

$$- \rho \omega^2 \widehat{\tau} = \mathbf{B} \nabla \left\{ \frac{\gamma \rho B^2}{\gamma \rho + B^2} \left( \operatorname{div} \widehat{\tau} \frac{B}{B^2} - 2 \widehat{\xi} \frac{[Bk] k_{\perp}}{B^2 k_{\perp \beta}} \right) \right\}. \quad (6.138)$$

Уравнения идеальных баллонных мод для тороидальных систем произвольной геометрии впервые были получены в [33], а для диссипативных баллонных мод (при учете конечной проводимости) — в [175]. В виде (6.137) и (6.138) уравнения баллонных мод были получены в [35].

Авторы благодарны М. И. Михайлову за помощь в работе.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### П1. МЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ СИСТЕМ КООРДИНАТ $(\rho, u, \xi)$

В отличие от [65], где вычислены метрические коэффициенты для случая  $k\rho \ll 1$ , сохраним в  $g_{33}^0$  и в  $\sqrt{g^0}$  все члены порядка  $k\rho$ , возникающие при преобразовании выражения  $h_s = 1 - k\rho \cos \omega$  к переменным  $\rho$  и  $u$ :

$$\begin{aligned} h_s &= 1 - k(\rho + \delta) \cos(u + \lambda) = \\ &= h + k\rho \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u + \frac{\lambda^2}{2} \cos u + \frac{\delta \lambda}{\rho} \sin u \right). \quad (\text{П1.1}) \end{aligned}$$

Здесь  $h = 1 - k\rho \cos u$ . При вычислениях будем считать малыми величины  $\delta/\rho$ ,  $\delta u'/\rho$ ,  $\lambda$ ,  $\lambda u'$ . Разложением по ним получаем

$$\begin{aligned}
\frac{g_{11}^0}{\sqrt{g^0}} &= \frac{1}{R\rho h} \left[ 1 + \delta'_\rho - \frac{\delta}{\rho} - \lambda'_u - \frac{k\rho}{h} \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u \right) \right]; \\
g_{12}^0/\sqrt{g^0} &= (\delta'_u + \rho^2 \lambda'_\rho)/(R\rho h); \\
\frac{g_{22}^0}{\sqrt{g^0}} &= \frac{\rho}{Rh} \left[ 1 + \lambda'_u + \frac{\delta}{\rho} - \delta'_\rho - \frac{k\rho}{h} \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u \right) \right]; \\
\frac{g_{13}^0}{\sqrt{g^0}} &= \frac{1}{R\rho h} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \delta - \frac{\delta^2}{2\rho} + \frac{k\delta^2}{2h} \cos u \right) + \rho^2 \lambda'_\zeta \lambda'_\rho - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\delta'_\zeta}{h} \frac{\partial}{\partial u} (\lambda h) \right]; \\
\frac{g_{23}^0}{\sqrt{g^0}} &= \frac{1}{R\rho h} \left[ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \rho^2 \lambda - \frac{k\rho^3}{2h} \lambda^2 \sin u \right) + \delta'_u \delta'_\zeta - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\rho^3 \lambda'_\zeta}{h} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( h \frac{\delta}{\rho} \right) \right]; \\
\frac{g_{33}^0}{\sqrt{g^0}} &= \frac{Rh}{\rho} \left[ 1 - \frac{\delta}{\rho} - \delta'_\rho - \lambda'_u + \frac{k\rho}{h} \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u \right) - \right. \\
&\quad - \frac{\delta \delta'_\rho}{\rho} - \frac{\delta \lambda'_u}{\rho} - \delta'_\rho \lambda'_u + \delta'_u \lambda'_\rho + \frac{\delta'^2_\zeta + \rho^2 \lambda'^2_\zeta}{R^2 h^2} + \left( \frac{\delta}{\rho} + \right. \\
&\quad \left. + \delta'_\rho + \lambda'_u \right)^2 + \frac{k\rho}{h} \left( \lambda^2 \frac{\cos u}{2} + \frac{\delta \lambda}{\rho} \sin u \right) - \\
&\quad \left. - \frac{k\rho}{h} \left( \frac{\delta}{\rho} + \delta'_\rho + \lambda'_u \right) \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u \right) \right]; \\
\sqrt{g^0} &= Rh\rho \left[ 1 + \frac{\delta}{\rho} + \delta'_\rho + \lambda'_u + \frac{k\rho}{h} \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u \right) + \right. \\
&\quad + \frac{\delta \delta'_\rho}{\rho} + \frac{\delta \lambda'_u}{\rho} + \delta'_\rho \lambda'_u - \delta'_u \lambda'_\rho + \frac{k\rho}{h} \left( \frac{\lambda^2}{2} \cos u + \frac{\delta \lambda}{\rho} \sin u \right) + \\
&\quad \left. + \frac{k\rho}{h} \left( \frac{\delta}{\rho} + \delta'_\rho + \lambda'_u \right) \left( \lambda \sin u - \frac{\delta}{\rho} \cos u \right) \right].
\end{aligned} \tag{П1.2}$$

Не зависящие от  $\zeta$  части последних четырех величин могут быть с учетом (4.24) представлены в виде

$$\alpha_{13}^{0\zeta} = -\frac{1}{2\pi R B_0 \rho^2} \frac{\partial \psi_v}{\partial u}, \quad \alpha_{23}^{0\zeta} = \frac{1}{2\pi R B_0} \frac{\partial \psi_v}{\partial \rho}; \tag{П1.3}$$

$$\alpha_{33}^{0\zeta} = \frac{Rh}{\rho} (1 + f_2), \quad \langle \sqrt{g^0} \rangle_\zeta = Rh\rho (1 + f_1), \tag{П1.4}$$

где  $\psi_v$  — функция (4.30);  $f_1$  и  $f_2$  — квадратичные по  $|\mathbf{B}_h|/B_0$  выражения, возникающие при усреднении

$g_{33}^0/\sqrt{g^0}$  и  $\sqrt{g^0}$  (П1.2) по  $\zeta$ :



$$f_1 + f_2 = \left\langle \left( \frac{\delta}{\rho} + \delta'_\rho + \lambda'_u \right)^2 + \frac{\delta_\zeta'^2 + \rho^2 \lambda_\zeta'^2}{R^2 h^2} \right\rangle_\zeta + 2 \frac{\langle h_s \rangle_\zeta - \tilde{h}}{h}; \quad (\text{П1.5})$$

$$\langle h_s \rangle_\zeta = k\rho \left\langle \frac{\lambda^2}{2} \cos u + \frac{\delta\lambda}{\rho} \sin u \right\rangle_\zeta.$$

## П2. ВЫЧИСЛЕНИЕ $\langle \mathbf{B}_n \nabla \tilde{\psi} \rangle_\zeta$ ДЛЯ СТЕЛЛАТОРА С КРУГОВОЙ ОСЬЮ

Для любого вектора  $\tilde{\mathbf{a}}$  и не зависящей от  $\zeta$  функции  $f$  выражение  $\tilde{\mathbf{a}} \nabla (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f)$ , подобное  $R h_s \mathbf{B}_n \nabla \tilde{\psi} / B_\zeta^0$ , может быть записано в виде  $2\tilde{\mathbf{a}} \nabla (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f) = \frac{\partial}{\partial \zeta} [(\tilde{\mathbf{a}} \nabla) (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f)] + \nabla f (\tilde{\mathbf{a}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{a}} - \tilde{\mathbf{a}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{a}}) + \nabla f \operatorname{rot} [\tilde{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}]$ . (П2.1)

Это равенство получается из тождества (6.33)

$$\mathbf{a} \nabla (\mathbf{b} \nabla f) = \mathbf{b} \nabla (\mathbf{a} \nabla f) + (\mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} - \mathbf{b} \operatorname{div} \mathbf{a} - \operatorname{rot} [\mathbf{a} \mathbf{b}]) \nabla f,$$

где полагаем  $\mathbf{a} = \tilde{\mathbf{a}}$ ,  $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{a}}$  и исключаем из правой части  $\hat{\mathbf{a}} \nabla (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f)$  с помощью

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} [(\hat{\mathbf{a}} \nabla) (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f)] = \tilde{\mathbf{a}} \nabla (\hat{\mathbf{a}} \nabla f) + \hat{\mathbf{a}} \nabla (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f). \quad (\text{П2.2})$$

Если  $\tilde{\mathbf{a}} = C \tilde{\mathbf{b}}$ , где  $C = C(r, z)$ ,  $\mathbf{a} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{b}} = 0$ , то

$$\tilde{\mathbf{a}} \operatorname{div} \hat{\mathbf{a}} - \hat{\mathbf{a}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{a}} = \left[ \nabla \frac{C^2}{2} [\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}] \right]; \quad (\text{П2.3})$$

$$\operatorname{rot} [\hat{\mathbf{a}} \tilde{\mathbf{a}}] = [\nabla C^2 [\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}]] + C^2 \operatorname{rot} [\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}]. \quad (\text{П2.4})$$

При этом

$$2\tilde{\mathbf{a}} \nabla (\hat{\mathbf{a}} \nabla f) = \frac{\partial}{\partial \zeta} [(\hat{\mathbf{a}} \nabla) (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f)] + C \nabla f \operatorname{rot} C [\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}]. \quad (\text{П2.5})$$

Пользуясь тождеством

$$\nabla f(r, \omega) \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla f \left[ \nabla \left( \frac{\mathbf{a} \nabla \zeta}{|\nabla \zeta|^2} \right) \nabla \zeta \right] - \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla f [\mathbf{a} \nabla \zeta]), \quad (\text{П2.6})$$

которое легко проверить, представив в его левой части  $\mathbf{a}$  в виде

$$\mathbf{a} = \nabla \zeta \frac{\mathbf{a} \nabla \zeta}{|\nabla \zeta|^2} + \frac{[\nabla \zeta [\mathbf{a} \nabla \zeta]]}{|\nabla \zeta|^2}, \quad (\text{П2.7})$$

преобразуем последнее слагаемое в (П2.5). Усредняя получающееся равенство

$$2\tilde{\mathbf{a}} \nabla (\hat{\mathbf{a}} \nabla f) = \frac{\partial}{\partial \zeta} [(\hat{\mathbf{a}} \nabla) (\tilde{\mathbf{a}} \nabla f)] - C^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla f [[\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}] \nabla \zeta]) + C \nabla f \left[ \nabla \left( C [\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}] \frac{\nabla \zeta}{|\nabla \zeta|^2} \right) \nabla \zeta \right], \quad (\text{П2.8})$$

находим

$$\langle \tilde{\mathbf{b}} \nabla (C \tilde{\mathbf{b}} \nabla f) \rangle_\zeta = \nabla f \left[ \nabla \left( C \left\langle \frac{[\tilde{\mathbf{b}} \tilde{\mathbf{b}}] \nabla \zeta}{2 |\nabla \zeta|^2} \right\rangle_\zeta \right) \nabla \zeta \right]. \quad (\text{П2.9})$$

Подставляя сюда  $\mathbf{b} = \mathbf{B}_h$ ,  $C = -Rh_s^2/B_0$   $f = \psi^0$ , получаем

$$\langle \mathbf{B}_h \nabla \tilde{\psi} \rangle_{\xi} = \nabla \psi^0 \left[ \nabla \frac{\psi_0}{2\pi} \nabla \xi \right], \quad (\text{П2.10})$$

где

$$\psi_0 = \frac{2\pi R h_s^2}{B_0} \left\langle \frac{[\mathbf{B}_h \widehat{\mathbf{B}}_h]}{2} \frac{\nabla \xi}{|\nabla \xi|^2} \right\rangle_{\xi} = \frac{2\pi R^2 h_s^3}{B_0} \langle B_{hr} \widehat{B}_{h\omega} \rangle_{\xi}. \quad (\text{П2.11})$$

**П.3. СВЯЗЬ ПЛАЗМЕННОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ  $(a, \theta, \xi)$  С ВАКУУМНОЙ  $(\rho, u, \zeta)$  И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ВЫПРЯМЛЕНИЯ СИЛОВЫХ ЛИНИЙ  $\lambda_1$  И  $\lambda_2$**

Метрические коэффициенты  $g_{ik}$  и  $g_{ik}^0$  при  $\rho = \rho(a, \theta)$ ,  $u = u(a, \theta)$  связаны соотношениями (4.29). Для преобразования координат (5.4), (5.5) входящие в (4.29) комбинации, через которые выражаются  $\alpha_{ik}^{\dot{}}$ , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho^{\dot{}} \rho^{\dot{}} + \rho^2 u^{\dot{}} u^{\dot{}} &= a \left\{ -\Delta' \left( 1 + \frac{\alpha}{2a} - \frac{\lambda_1^2}{8} - \frac{\lambda_2}{2} \right) + a \lambda_1' \left( 1 - \frac{\alpha}{a} - \lambda_2 \right) + \lambda_1 \left( \frac{\alpha}{a} + \frac{a \lambda_2'}{2} \right) \sin \theta + \left[ a \lambda_2' - 2 \frac{\alpha}{a} + \lambda_1 \left( \frac{a \lambda_1'}{2} - \Delta' \right) \right] \sin 2\theta \right\}; \\ \rho^{\dot{}} \rho^{\dot{}} + \rho^2 u^{\dot{}} u^{\dot{}} &= a^2 \left\{ 1 + \frac{\lambda_1^2}{2} + 2\lambda_1 (1 + \lambda_2) \cos \theta + \left( 2 \frac{\alpha}{a} + \frac{\lambda_1^2}{2} + 4\lambda_2 \right) \cos 2\theta \right\}; \\ \rho^2 u^{\dot{}} &= \left[ (\Delta - a \Delta') \left( 1 - \frac{3}{8} \lambda_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} \right) + \frac{\alpha \Delta' - \alpha' \Delta}{2} + a \lambda_1' \left( a - \alpha - \frac{3}{4} \Delta \lambda_1 \right) + \Delta \frac{a \lambda_2'}{2} \right] \sin \theta + \left[ a^2 \lambda_2' + a \Delta \frac{\lambda_1'}{2} + \frac{\lambda_1}{2} (\Delta - a \Delta') \right] \sin 2\theta; \\ \rho^2 u^{\dot{}} &= a \left\{ a \left[ \Delta \left( 1 - \frac{3}{8} \lambda_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\alpha}{2a} \right) + a \lambda_1 \left( 1 - \frac{\alpha}{a} \right) \right] \cos \theta + [2a \lambda_2 + 2\alpha + \lambda_1 \Delta] \cos 2\theta \right\}; \\ \rho (\rho^{\dot{}} u^{\dot{}} - \dot{\rho} u^{\dot{}}) &= a \left\{ 1 + \left[ \Delta' \left( 1 - \frac{3}{8} \lambda_1^2 + \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\alpha}{2a} \right) + \lambda_1 \left( 1 - \frac{\alpha}{2a} - \frac{\alpha'}{2} \right) \right] \cos \theta + \left[ \alpha' + \Delta' \lambda_1 + 2\lambda_2 + \frac{\alpha}{a} \right] \cos 2\theta \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.1})$$

Параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются из условия независимости от  $\theta$  величины  $\alpha_{33}^*$ , которое с помощью (П1.4) может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\rho D}{1 - k\rho \cos u + f_2} \right) = 0. \quad (\text{П3.2})$$

Подставляя в (П3.2)  $\rho(\rho' \dot{u} - \rho u')$  в виде (П3.1), получаем с точностью до членов порядка  $\Delta'^3$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\Delta' + \Delta'^3/8 + \alpha \Delta'/(4a) - \alpha' \Delta'/4 + v_1 - ka; \\ \lambda_2 &= \Delta'^2/2 - \alpha/(2a) - \alpha'/2, \end{aligned} \right\} \quad (\text{П3.3})$$

где  $v_1$  — коэффициент разложения  $f_2(\rho)$  в ряд Фурье

$$f_2(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(a) \cos(n\theta). \quad (\text{П3.4})$$

Выражение  $\rho \cos u$ , входящее в метрические коэффициенты, записывается теперь в виде

$$\begin{aligned} \rho \cos u &= \Delta + \frac{a\Delta'}{2} + a \left( 1 - \frac{3}{8} \Delta'^2 + \right. \\ &\left. + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{a} + \frac{\alpha'}{4} \right) \cos \theta - \frac{a\Delta'}{2} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (\text{П3.5})$$

#### П4. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ [6.34]

Прямой способ получения уравнения (6.34), поясняющий основную цель перехода от (6.32) к (6.34) — исключение высших производных величин  $T_0$  и  $T_3$ , указан в разд. (6.1). Дадим здесь более простой, хотя и несколько формальный, вывод (6.34).

Исходное уравнение малых колебаний (6.26) может быть записано как

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \nabla T_0 + \mathbf{B}^2 \nabla T_3 - \mathbf{B}(\mathbf{B} \nabla T_3) + \\ &+ \mathbf{B}^2 U \nabla a + (\mathbf{B} \nabla T_2) \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2}. \end{aligned} \quad (\text{П4.1})$$

Здесь использовано обозначение

$$\mathbf{B}^2 U \equiv K \xi \nabla a + \mathbf{B} \nabla T_1 + T_2 \left( S - \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \right) - 2\rho' T_3. \quad (\text{П4.2})$$

Умножив (П4.1) векторно на  $\mathbf{B}/\mathbf{B}^2$  и подействовав на получившееся уравнение оператором  $\text{div}$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{div} \rho \frac{[\xi \mathbf{B}]}{\mathbf{B}^2} &= -\nabla T_0 \text{rot} \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} - \\ &- j \nabla T_3 - [\mathbf{B} \nabla a] \nabla U + \text{div} \mathbf{B} \nabla T_2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2}. \end{aligned} \quad (\text{П4.3})$$

Собираем в правой части (П4.3) члены с  $T_3$  и преобразуем их с учетом (6.20) и (1.10)

$$\begin{aligned}
 -j \nabla T_3 + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{2\rho' T_3}{B^2} &= -\alpha \mathbf{B} \nabla T_3 + \\
 + \rho' \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} \nabla T_3 + \frac{4\rho'}{B^2} T_3 [\mathbf{Bk}] \nabla a. & \quad (\text{П4.4})
 \end{aligned}$$

Последний член в (П4.3) преобразуем по формуле (6.33)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}(\mathbf{B} \nabla T_2) \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} &= \frac{\nabla a \nabla}{|\nabla a|^2} \mathbf{B} \nabla T_2 + \mathbf{B} \nabla T_2 \operatorname{div} \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} = \\
 &= \mathbf{B} \nabla \frac{\nabla a \nabla T_2}{|\nabla a|^2} + \nabla T_2 \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2}. \quad (\text{П4.5})
 \end{aligned}$$

Теперь уравнение (П4.3) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \rho \frac{[\xi \mathbf{B}]}{B^2} &= \mathbf{B} \nabla \frac{\nabla a \nabla T_2}{|\nabla a|^2} + \nabla T_2 \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2} - \\
 - \nabla T_0 \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2} - \alpha \mathbf{B} \nabla T_3 + \rho' \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} \nabla T_3 + \\
 + \frac{4\rho'}{B^2} T_3 [\mathbf{Bk}] \nabla a - [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \left( U + \frac{2\rho'}{B^2} T_3 \right). & \quad (\text{П4.6})
 \end{aligned}$$

Для дальнейшего его упрощения понадобятся два легко проверяемых тождества:

$$\operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2} = \frac{\alpha \mathbf{B}}{B^2} + 2 \frac{[\mathbf{Bk}]}{B^2} - \frac{\rho'}{B^2} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2}; \quad (\text{П4.7})$$

$$\operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2} = \frac{\mathbf{B}}{B^2} \left( \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + \rho' \right) + \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} S. \quad (\text{П4.8})$$

С их помощью получаем

$$\begin{aligned}
 - \nabla T_0 \operatorname{rot} \frac{\mathbf{B}}{B^2} + \nabla T_2 \operatorname{rot} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{|\nabla a|^2} &= - \frac{\alpha \mathbf{B} \nabla T_0}{B^2} - \\
 - 2 \frac{[\mathbf{Bk}]}{B^2} \nabla T_0 + \frac{\rho'}{B^2} \left( \frac{|\nabla a|^2}{B^2} \rho' \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - [\mathbf{B} \nabla a] \nabla T_3 \right) + \\
 + \frac{\mathbf{B} \nabla T_2}{B^2} \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} + S \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} \nabla T_2. & \quad (\text{П4.9})
 \end{aligned}$$

Для исключения комбинации  $\mathbf{B} \nabla T_2 + \nabla T_0 [\mathbf{B} \nabla a] / B^2$  здесь использовано уравнение (6.31). Подстановка (П4.9) в уравнение (П4.6) позволяет привести его к виду

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \operatorname{div} \rho \frac{[\xi \mathbf{B}]}{B^2} - \frac{\rho'}{B^2} \frac{|\nabla a|^2}{B^2} \rho \eta \right) = \mathbf{B} \nabla \frac{\nabla a \nabla T_2}{|\nabla a|^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{j\mathbf{B}}{|\nabla a|^2} \frac{[\mathbf{B} \nabla a]}{B^2} \nabla T_2 - [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{K\xi \nabla a + \mathbf{B} \nabla T_1}{B^2} + \\
& + T_2 [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \frac{j\mathbf{B}/|\nabla a|^2 - S}{B^2} - \alpha \mathbf{B} \nabla T_3 + \frac{4\rho' T_3}{B^2} \nabla a [\mathbf{B}k] - \\
& - \frac{\alpha \mathbf{B} \nabla T_0}{B^2} - 2 \frac{[\mathbf{B}k]}{B^2} \nabla T_0 + \frac{\mathbf{B} \nabla T_2}{B^2} \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2}. \quad (\text{П4.10})
\end{aligned}$$

### П.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОГО ВЫРАЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛА $\mathcal{W}$ (6.38)

После умножения уравнения малых колебаний (6.26) на  $\xi$  выделим в нем для удобства комбинации с каждой из величин  $T_i$ . С учетом определений (6.25), (6.29) и (6.40)–(6.42) их можно записать так:

$$\xi \nabla T_0 = \operatorname{div} T_0 \xi - T_0 \operatorname{div} \xi = \operatorname{div} T_0 \xi - T_0^2/\gamma\rho; \quad (\text{П5.1})$$

$$(\xi \nabla a) \mathbf{B} \nabla T_1 = \operatorname{div} \xi T_1 \mathbf{B} - T_1 \mathbf{B} \nabla \xi = \operatorname{div} \xi T_1 \mathbf{B} - |\nabla a|^2 T_1^2; \quad (\text{П5.2})$$

$$\xi \nabla a T_2 \left( S - \frac{j\mathbf{B}'}{|\nabla a|^2} \right) + \eta \operatorname{div} T_2 \mathbf{B} = \operatorname{div} \eta T_2 \mathbf{B} - \frac{B^2}{|\nabla a|^2} T_2^2; \quad (\text{П5.3})$$

$$\begin{aligned}
\xi_{\perp} \mathbf{B}^2 \nabla T_3 - 2\rho' T_3 \xi \nabla a &= \operatorname{div} T_3 \mathbf{B}^2 \xi_{\perp} - T_3 (2\rho' \xi + \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \xi_{\perp}) = \\
&= \operatorname{div} T_3 \mathbf{B}^2 \xi_{\perp} - \mathbf{B}^2 T_3^2. \quad (\text{П5.4})
\end{aligned}$$

В последней формуле использовано очевидное следствие (6.29) и (6.42):

$$\operatorname{div} \mathbf{B}^2 \xi_{\perp} = \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a \nabla \xi}{|\nabla a|^2} + [\mathbf{B} \nabla a] \nabla \eta + \xi \operatorname{div} \mathbf{B}^2 \frac{\nabla a}{|\nabla a|^2} = \mathbf{B}^2 T_3 - 2\rho' \xi. \quad (\text{П5.5})$$

Вспомогательные соотношения (П5.1)–(П5.4) позволяют представить  $\rho \xi \partial^2 \xi / \partial t^2$  в виде

$$\begin{aligned}
\rho \xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= - \left( \frac{T_0^2}{\gamma\rho} + |\nabla a|^2 T_1^2 + \frac{B^2}{|\nabla a|^2} T_2^2 + \mathbf{B}^2 T_3^2 - K \xi^2 \right) + \\
&+ \operatorname{div} (\xi T_1 + \eta T_2) \mathbf{B} + \operatorname{div} (T_0 \xi + T_3 \mathbf{B}^2 \xi_{\perp}). \quad (\text{П5.6})
\end{aligned}$$

При интегрировании этого выражения по объему плазмы член  $\operatorname{div}(\dots) \mathbf{B}$  исчезает, поскольку  $\mathbf{B}$  не имеет нормальной составляющей на границе. Последний член дает вклад в  $\mathcal{W}$  только в том случае, если смещение  $\xi$  возмущает границу плазмы. В противном случае, при  $\xi(b) = 0$ , интегрирование (П5.6) приводит к (6.47).

## П.6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО РАВЕНСТВА (6.70)

Для определения  $\tilde{k}$  необходимо вычислить последний член в (6.65).

Из уравнения равновесия  $\nabla p = [jB]$ , которое с учетом (2.11) и (2.25) может быть приведено к виду

$$p' = \frac{1}{4\pi^2} p' V' [\nabla a \nabla \theta] \nabla \zeta - \frac{1}{2\pi} B \nabla v + \frac{1}{2\pi} j \nabla \eta + \frac{1}{4\pi^2} [\nabla \eta \nabla v] \nabla a, \quad (П6.1)$$

получаем

$$\frac{1}{4\pi^2} [\nabla a \nabla \theta] \nabla \zeta = \frac{1}{V'} + \frac{1}{p' V'} \left\{ B \nabla \frac{v}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \left( j - \left[ \nabla a \nabla \frac{v}{2\pi} \right] \right) \nabla \eta \right\}. \quad (П6.2)$$

Последний член в (6.65) теперь может быть записан так:

$$\frac{[B \nabla a]}{|\nabla a|^2} \operatorname{rot} w = \frac{J'' \psi' - F'' \Phi'}{V'} + \frac{J'' \psi' - F'' \Phi'}{p' V'} B \nabla \frac{v}{2\pi} - \left\{ [w' \nabla a] + \frac{J'' \psi' - F'' \Phi'}{p' V'} \left( j - \left[ \nabla a \nabla \frac{v}{2\pi} \right] \right) \right\} \nabla \frac{\eta}{2\pi}. \quad (П6.3)$$

Прямым вычислением, используя уравнение (1.3), находим

$$p' V' w' - (J'' \psi' - F'' \Phi') \left( w - \nabla \frac{v}{2\pi} \right) = (J' F'' - J'' F') \frac{1}{2\pi} (\Phi' \nabla \theta + \psi' \nabla \zeta). \quad (П6.4)$$

Это позволяет преобразовать фигурную скобку в (П6.3):

$$\frac{[B \nabla a]}{|\nabla a|^2} \operatorname{rot} w = \frac{J'' \psi' - F'' \Phi'}{V'} \left( 1 - B \nabla \frac{v}{2\pi p'} \right) + \frac{J' F'' - J'' F'}{p' V'} B \nabla \frac{\eta}{2\pi}. \quad (П6.5)$$

Вспомогательное тождество

$$\frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2} e_1 = \frac{[\nabla a [w \nabla a]]}{|\nabla a|^2} e_1 = w e_1 - \frac{w \nabla a}{|\nabla a|^2} \quad (П6.6)$$

дает последнее нужное нам соотношение

$$\frac{w \nabla a}{|\nabla a|^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2} e_1. \quad (П6.7)$$

Подставляя (П6.5) и (П6.7) в (6.65), получаем окончательно:

$$K = \frac{j^2}{|\nabla a|^2} + \Omega + B \nabla \left\{ \frac{v}{2\pi p'} (\Omega - p'') + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial v}{\partial a} - \frac{[j \nabla a]}{|\nabla a|^2} e_1 - \frac{J' F'' - J'' F'}{p' V'} \frac{\eta}{2\pi} \right\}, \quad (П6.8)$$

что соответствует компактной записи (6.69) с  $\tilde{k}$  в виде (6.70).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Spitzer L.//Phys. Fluids. 1958. Vol. 1. P. 253—264.
2. Бишоп А. Проект Шервуд М.: Атомиздат, 1960.
3. Дремин М. И., Стефановский А. М.//Физика плазмы 1979 Т. 5 С 892—901.
4. Nagao S. Asperator Group.//Proc. 7th Symp. Engng. Fus. Res. Knoxville. USA. 1977. Vol. 1 P. 841—853.
5. Glagolev V. M., Kadomtsev V. B., Shafranov V. D., Trubnikov B. A.//X Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Moscow. 1981. Vol. 1. E-8.
6. Yoshikawa S.//Fourth International Stellarator Workshop. Cape-May, New Jersey, 1982. Vol. 2. P. 1—22.
7. Shafranov V. D.//Nucl. Fus. 1980, Vol. 20. P. 1075—1083.
8. Морозов А. И., Соловьев Л. С.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича М· Госатомиздат, 1963. Вып. 2.
9. Соловьев Л. С., Шаfranov В. Д.//Там же, 1967. Вып. 5.
10. Морозов А. И., Соловьев Л. С.//Там же, 1967. Вып. 2.
11. Gibson A.//Phys. Fluids. 1967. Vol. 10. P. 1553—1560.
12. Hastie R.J., Taylor J. B., Haas F. A.//Ann. Phys. 1967. Vol. 41. P. 302—338.
13. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича М: Атомиздат, 1973. Вып. 7
14. Kovrizhnykh L. M.//Nucl. Fus. 1984. Vol. 24. P. 851—936.
15. Stringer T.//Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. P. 810—819.
16. Hinton F. L., Hazeltine R. D.//Rev. Mod. Phys. 1976. Vol 48, P. 239—308.
17. Волков Е. Д., Супруненко В. А., Шишкин А. А. Стелларатор. Киев: Наукова думка, 1983
18. Grieger G., Renner H., Wobig H.//Nucl. Fus. 1985. Vol. 25. P. 1231—1242.
19. Уо К.— Ibid. P. 1243—1248.
20. Shafranov V. D.//Phys. Eluids. 1983. Vol. 26. P. 357—364.
21. Коврижных Л. М., Щепетов С. В. Тр. ФИАН. 1985 Т. 160 С. 58—92.
22. Kruskal M. D., Kulsrud R. M.//Phys. Fluids. 1985. Vol. 1. P. 265—274.
23. Mercier C.//Nucl. Fus. 1963. Vol. 3. P. 89—98.
24. Shafranov V. D.//Ibid 1968. Vol. 8. P. 253—262.
25. Mercier C. In colloboration with Luc H. Lecture in Plasma Physics. Luxembourg. CEC, September 1974
26. Mercier C.//Nucl. Fus. Suppl. 1962. Vol. 2. P. 801—808.
27. Greene J. M., Johnson J. L.//Phys Fluids. 1962. Vol. 5. P. 510—517.
28. Соловьев Л. С.//Журн эксперим. и теорет. физ. 1967. Т. 53. С. 626—643.
29. Бейтман Г. МГД-неустойчивости. М· Энергоиздат, 1982
30. Соловьев Л. С.//Журн. эксперим. и теорет физ 1967 Т 53 С 2063—2069.
31. Соловьев Л. С.//Вопросы теории плазмы/Под ред М. А. Леонтовича. М: Атомиздат, 1972 Вып 6
32. Shafranov V. D., Yurchenko E. I.//Nucl. Fus. 1968. Vol. 8. P. 329—339.
33. Correa-Restrepo D.//Z. Naturforsch. 1978. Bd 33a. S. 789—797.
34. Shafranov V. D.//IX Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Oxford. Invited Papers. 1979. P. 503—524.
35. Dewar R. L., Glasser A. H.//Phys. Fluids. 1983 Vol. 26. P. 3038—3052.
36. Johnson J. L., Oberman C. R., Kulsrud R. M., Frieman E. A.//Phys. Fluids, 1958. Vol. 1. P. 281—296.
37. Greene J. M., Johnson J. L.//Phys. Fluids. 1961. Vol. 4 P. 875—890.
38. Johnson J. L., Greene J. M.//Phys. Fluids. 1961. Vol. 4. P. 1417—1426.
39. Johnson J. L., Greene J. M., Weimer K. E.//Nucl. Fus. 1962. Vol. 2. P. 16—22.
40. Greene J. M., Johnson J. L., Weimer K. E.//Plasma Phys. 1966. Vol. 8. P. 145—155.
41. Johnson J. L. Prepr. IPP 6/162. Garching, 1977.
42. Коврижных Л. М., Щепетов С. В.//Физика плазмы. 1980. Т. 6. С. 976—986.
43. Коврижных Л. М., Щепетов С. В.//Там же. 1981, Т. 7. С. 419—427.

44. Коврижных Л. М., Щепетов С. В.//Письма в ЖЭТФ, 1981, Т. 33. С. 441—444.
45. Коврижных Л. М., Щепетов С. В.//Физика плазмы. 1981. Т. 7. С. 965—967.
46. Zakharov L. E., Mikhailov M. I., Pistunovich V. I. e. a.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna. 1981. Vol. 1. P. 313—328.
47. Шафранов В. Д.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1963. Вып. 2.
48. Danilkin I. S., Kovrizhnykh L. M., Shchepetov S. V.//X Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Moscow, 1981. Vol. 1. E-10.
49. Kovrizhnykh L. M., Shchepetov S. V.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23. P. 859—867.
50. Rewoldt G., Johnson J. L.//Nucl. Fus. 1984 Vol. 24. P. 733—738.
51. Готт Ю. В., Иоффе М. С., Тельковский В. Г.//Ядерный синтез: Дополнение. 1962. Т. 3 С. 1045—1047.
52. Furth H. P., Rosenbluth M. N.//Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. P. 764—766.
53. Lenard A.//Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. P. 1875—1877.
54. Johnson J. L.//Phys. Fluids 1964. Vol. 7. P. 2015—2016.
55. Taylor J. V.//Phys. Fluids. 1965. Vol. 8. P. 1203—1205.
56. Solov'ev L. S., Shafranov V. D.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna 1966. Vol. 1. P. 169—190.
57. McNameara B., Whiteman K. J., Taylor J. V.//Ibid. P. 145—167.
58. Кадомцев Б. Б.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1959. Т. 37. С. 1646—1651.
59. Shafranov V. D.//Plasma Phys. 1971. Vol. 13. P. 349—352.
60. Shafranov V. D., Yurchenko E. I.//Nucl. Fus. 1969. Vol. 9. P. 285—289.
61. Lortz D., Nührenberg J.//Z. Naturforsch. 1976. Bd 31a. S. 1277—1288.
62. Lortz D., Nührenberg J.//Nucl. Fus. 1977. Vol. 17. P. 125—133.
63. Михайловский А. Б., Шафранов В. Д.//Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 18. С. 208—210.
64. Михайловский А. Б., Шафранов В. Д.//Журн. эксперим. и теорет. физ. 1974. Т. 66 С. 190—199
65. Михайлов М. И.//Физика плазмы 1980. Т. 6. С. 45—54.
66. Михайлов М. И., Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д.//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35. С. 152—154.
67. Пустовитов В. Д.//Физика плазмы. 1983 Т. 9. С. 575—584.
68. Strauss H. R.//Plasma Phys. 1980. Vol. 22. P. 733—745.
69. Strauss H. R., Monticello D. A.//Phys. Fluids. 1981. Vol. 24. P. 1148—1155.
70. Lortz D., Nührenberg J. Abstracts of Sherwood Meeting. Austin, Texas, 1981. Paper 3B46.
71. Pustovitov V. D.//Nucl. Fus. 1983. Vol. 23. P. 1079—1088.
72. Pustovitov V. D., Shafranov V. D., Zakharov L. E. e. a.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna 1983. Vol. 2. P. 541—556.
73. Bauer F., Betancourt O., Garabedian P. A Computational Method in Plasma Physics. Springer Series in Computational Physics. N. Y.: Springer — Verlag, 1978.
74. Bauer F., Betancourt O., Garabedian P. Magnetohydrodynamic Equilibrium and Stability of Stellarators. N. Y.: Springer — Verlag, 1984.
75. Wakatani M.//IEEE Transactions on Plasma Science. 1981. Vol. PS-9. P. 243—247.
76. Carreras B. A., Hicks H. R., Holmes J. A. e. a.//Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. P. 3569—3579.
77. Шафранов В. Д.//Ядерный синтез. 1964. Т. 4. С. 114—124.
78. Шафранов В. Д.//Там же. С. 232—243.
79. Шафранов В. Д.//Там же 1963 Т. 3. С. 183—189
80. Глаголев В. М., Ленёва А. Е. Препринт ИАЭ-3052. М., 1978.
81. Degtyarev L. M., Poshekhonov Yu. Yu., Shafranov V. D.//XI Europ. Conf. on Control Fus. and Plasma Phys. Aachen. 1983. Vol. 7D. Part II. P. 103—105.
82. Monticello D. A., Dewar R. L., Furth H. P., Reiman A.//Phys. Fluids. 1984. Vol. 27. P. 1248—1252.



83. Betancourt O.//Proc. of the US-Japan Workshop on 3d MHD Simulations. Nagoya, Japan. 1983. P. 76—80.
84. Grossman R., Herrnegger F., Nührenberg J.//XI Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Aachen. 1983. Vol. 7D. Part II. P. 155—158.
85. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Препринт ИАЭ-2789. М., 1977.
86. Arsenin V. V., Glagolev V. M., Kadomtsev V. B. e. a.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna. 1983. Vol. 3. P. 159—170.
87. Михайловский А. Б., Демченко В. В., Омельченко А. Я.//Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 351—356.
88. Трубников Б. А., Глаголев В. М., Лазарев С. Л., Добряков А. В.//Там же. 1985. Т. 11. С. 155—162.
89. Shafranov V. D.//X Europ. Conf. on Control. Fus. and Plasma Phys. Moscow. 1981. Vol. 2. P. 77—86.
90. Пустовитов В. Д.//Физика плазмы 1982. Т. 8. С. 473—483.
91. Schmidt M. J.//Phys. Fluids. 1979. Vol. 22. P. 2400—2407.
92. Newcomb W. A.//Ann. Phys. 1960. Vol. 10. P. 232—245.
93. Шафранов В. Д.//Журн техн физ. 1970. Т. 40. С. 241—253.
94. Matsuoka K., Miyamoto K., Ohasa K., Wakatani M.//Nucl. Fus. 1977. Vol. 14. P. 1123—1131.
95. Miyamoto K.//Nucl. Fus. 1978. Vol. 18. P. 243—284.
96. Cooper W. A., Hender T. C.//Plasma Phys. and Control. Fus. 1984. Vol. 26. P. 921—933.
97. Connor J. W., Hastie R. J., Taylor J. B.//Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40. P. 396—399.
98. Connor J. W., Hastie R. J., Taylor J. B.//Proc. Roy. Soc. Lond. 1979, Vol. A365. P. 1—27.
99. Погуце О. П., Юрченко Э. И.//Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 786—795.
100. Погуце О. П., Юрченко Э. И.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11.
101. Carreras V. A., Hicks H. R., Holmes J. A. e. a.//Nucl. Fus. 1984. Vol. 24. P. 1347—1355.
102. Mikhailov M. I., Shafranov V. D.//Plasma Phys. 1982. Vol. 24. P. 233—242.
103. Anania G., Johnson J. L.//Phys. Fluids. 1983. Vol. 26. P. 3070—3078.
104. Garcia L., Carreras V. A., Harris J. H. e. a.//Nucl. Fus. 1984. Vol. 24. P. 115—129.
105. Holmes J. A., Peng Y.-K. M., Lynch S. J.//J. Comput. Phys. 1980. Vol. 36. P. 35—54.
106. Chodura R., Schlüter A.//J. Comput. Phys. 1981. Vol. 41. P. 68—88.
107. Hender T. C., Carreras V. A., Garcia L. e. a. Preprint ORNL/TM-9239. Oak Ridge, 1984.
108. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича и Б. Б. Кадомцева. М.: Энергоиздат, 1982. Вып. 11.
109. Михайловский А. Б. Неустойчивости плазмы в магнитных ловушках. М.: Атомиздат, 1978.
110. Михайловский А. Б.//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Атомиздат, 1979. Вып. 9.
111. Вабищевич П. Н., Дегтярев Л. М., Пошехонов Ю. Ю. и др.//Физика плазмы. 1983. Т. 9. С. 484—494.
112. Volkov T. F., Dobryakov A. V., Trubnikov V. A.//Nucl. Fus. 1985. Vol. 25. P. 891—905.
113. Mikhailovskii A. B., Aburdzhania Kh. D.//Plasma Phys. 1979. Vol. 21. P. 109—126.
114. Hamada S.//Nucl. Fus. 1962. Vol. 2. P. 23—37.
115. Cary J. R., Kotschenreuther M.//Phys. Fluids. 1985. Vol. 28. P. 1392—1401.
116. Boozer A. H.//Ibid 1981. Vol. 24. P. 1999—2003.
117. Boozer A. H.//Ibid. 1984. Vol. 27. P. 2110—2114.
118. Boozer A. H.//Ibid. 1984. Vol. 27. P. 2441—2445.
119. Hender T. C., Carreras V. A.//Ibid 1984. Vol. 27. P. 2101—2109.
120. Dewar R. L., Monticello D. A., Sy W. N.//Ibid. 1984. Vol. 27, P. 1723—1732.
121. Дегтярев Л. М., Дроздов В. В., Михайлов М. И. и др.//Физика плазмы. 1985. Т. 11. С. 39—50.

122. Delucia J., Jardin S. C., Todd M. M.//J. Comput. Phys., 1980. Vol. 37. P. 183—204.
123. Lao L. L., Weiland R. M., Houlberg W. A., Hirshman S. P.//Comput. Phys. Commun. 1982. Vol. 27. P. 129—146.
124. Hicks H. R., Dory R. A., Holmes J. A.//Comput. Phys. Rep. 1984. Vol. 1. P. 373—388
125. Degtyarev L. M., Drozdov V. V.//Ibid. 1985. Vol. 2. P. 341—387.
126. Hirshman S. P., Weitzner H.//Phys. Fluids. 1985. Vol. 28. P. 1207—1209.
127. Spies G. O., Nelson D. B.//Ibid. 1974. Vol. 17. P. 1865—1878.
128. Spies G. O., Nelson D. B.//Ibid. P. 1879—1884.
129. Пустовитов В. Д.//Физика плазмы 1984 Т. 10. С 1148—1156.
130. Пустовитов В. Д.//Там же 1985 Т 11. С 594—599.
- 131 Grad H.//Phys. Fluids. 1967. Vol. 10 P. 137—154.
132. Lortz D., Rebhan E., Spies G.//Nucl. Fus. 1971. Vol. 11. P. 583—590.
133. Kuo-Petravic G., Boozer A. H., Rome J. A., Fowler R. M.//J. Comput. Phys. 1983. Vol. 51. P 261—272
134. Дегтярев Л. М., Дроздов В. В. Препринт № 32 ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. М., 1984.
135. Bateman G.//Nucl. Fus. 1973. Vol. 13. P. 227—238.
136. Clarke J. F., Sigmar D. J.//Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. P. 70—74.
137. Dory R. A., Peng H.-K. M.//Nucl. Fus. 1977. Vol. 18, P. 21—31.
138. Захаров Л. Е., Шафранов В. Д. Препринт ИАЭ-3075 М., 1978.
139. Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д.//Физика плазмы. 1979. Т. 5. С. 962—968.
140. Pereverzev G. V., Shafranov V. D., Zakharov L. E.//Theoretical and Computational Plasma Physics. IAEA, Vienna. 1978. P. 469—481.
141. Пустовитов В. Д.//Письма в ЖЭТФ. 1982. Т. 35 С. 3—5.
142. Johnson J. L. Preprint PPPL-2017. Princeton, 1983.
143. Захаров Л. Е.//Физика плазмы. 1981. Т. 7. С. 18—40
144. Богомолов Л. М., Захаров Л. Е. Препринт ИАЭ 4060/6. М., 1984.
145. Zakharov L. E., Goedbloed J. P.//Nucl. Fus. 1980. Vol. 20. P. 1515—1527.
146. Okhawa T., Chu M., Chu C., Schaffer M.//Ibid. 1980. Vol. 20. P. 1464—1469.
147. Grad H., Hu P. N., Stevens D. S.//Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1975. Vol. 72. P. 3789—3796.
148. Pao Y. P.//Phys Fluids. 1976. Vol. 19. P. 1177—1182.
149. Lortz D., Nührehberg J.//Z. Naturforsch. 1982. Bd 37a. S. 876—878.
150. Шафранов В. Д., Юрченко Э. И.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna. 1971. Vol. 2. P. 519—526.
151. Михайлов М. И., Пустовитов В. Д.//Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 34. С. 388—391.
152. Захаров Л. Е. Препринт ИАЭ 4114/6 М., 1985
153. Hirshman S. P., Hogan J. T. Preprint ORNL/TM-9547. Oak Ridge, 1986.
154. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979
155. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978
156. Разумова К. А.//Атомная энергия. 1966. Т 20. С 459—464.
157. Мирнов С. В.//Там же 1969. Т 26 С. 458—458.
158. Artsimovich L. A.//Nucl. Fus. 1972. Vol. 12. P 215—252.
159. Андрюхина Э. Д., Федянин О. И.//Физика плазмы. 1977. Т. 3. С. 792—798.
160. Голдсун Р. Дж.//Основы физики плазмы/Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана М.: Энергоатомиздат, 1984 Т. 2. С. 583—627.
161. Брагинский С. И., Шафранов В. Д.//Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 2. С. 26—80.
162. Шафранов В. Д.//Атомная энергия. 1965. Т. 19. С. 175—181.
163. Greene J. M., Johnson J. L., Weimer K. E.//Phys Fluids. 1971. Vol. 14. P. 671—683.
164. Zakharov L. E., Shafranov V. D.//Plasma Phys. and Control. Nucl. Fus. Res. IAEA, Vienna. 1977. Vol. 2. P. 155—167.
165. Пустовитов В. Д.//Физика плазмы. 1982. Т. 8. С. 34—36.

166. **Bernstein I. B., Frieman E. A., Kruskal M. D., Kulsrud R. M.**//Proc. Roy. Soc. 1958. Vol. A244. P. 17—40.
167. **Friedberg J. P.**//Rev. Mod. Phys. 1982. Vol. 54. P. 801—902.
168. **Бернштейн А.**//Основы физики плазмы/Под ред. А. А. Галеева и Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1983. Т. 1.
169. **Калсруд Р.**//Там же. С. 122—152.
170. **Greene J. M., Johnson J. L.**//Plasma Phys. 1968. Vol. 10. P. 729—745.
171. **Кадомцев Б. Б.**//Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 2.
172. **Grad H.**//Ann. of the New York Academy of Sciences, 1980. Vol. 357, P. 223—235
173. **Liley V. C.**//J. Nucl. Energy. 1962. Vol. Pt. C4. P. 325—330.
174. **Ware A. A.**//Phys. Fluids. 1964. Vol. 7. P. 2006—2011.
175. **Correa-Restrepo D.**//Z. Naturforsch. 1982. Bd 37a. S. 848—858.

**Векштейн Г. Е.** Магнитотепловые процессы в плотной плазме. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 15/Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 50 с.

Рассмотрены процессы переноса в плазме высокого давления, когда величина  $\beta \approx 8\pi lT/H^2 \geq 1$ .

Проведена классификация различных режимов остывания плазмы с  $\beta \ll 1$ . Показано, что эффективная теплопроводность такой плазмы намного больше классической. Решена задача о распространении в плотной плазме радиационной волны остывания.

Исследованы особенности диффузии магнитного поля и тепла в плазме с  $\beta \geq 1$ , проявляющиеся при обращении магнитного поля в  $\theta$ -пинче, генерации мегатесла магнитных полей при сжатии плазмы лайнером, диссипации энергии магнитного поля в нейтральном слое

Описана диффузия многозарядных ионов в плазме с  $\beta \gg 1$  и показано, что эффект «температурной экранировки» тяжелых ионов приводит к развитию радиационной неустойчивости многокомпонентной плазмы.

Ил. 18. Библиогр. 52

**Брейзман Б. Н.** Коллективное взаимодействие релятивистских электронных пучков с плазмой — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 15/Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 89 с

Рассмотрены коллективные механизмы нагрева плазмы пучком релятивистских электронов. В первой части изложена линейная теория неустойчивостей пучка в изотропной и магнитоактивной плазме. Во второй части рассмотрены квазилинейные и нелинейные эффекты, ограничивающие развитие неустойчивостей, и описаны соответствующие режимы релаксации пучка. Основное внимание уделено взаимодействию пучка с ленгмюровскими волнами. Подробно проанализированы, в частности, стационарные спектры возбуждаемой пучком слабой ленгмювской турбулентности, включая особенности установления этих спектров и их перестройку под влиянием внешнего магнитного поля. Обсуждена картина нагрева электронов плазмы при поглощении возбужденных пучком волн.

Ил. 12. Библиогр. 30

**Пустовитов В. Д., Шафранов В. Д.** Равновесие и устойчивость плазмы в стеллараторах. — В кн.: Вопросы теории плазмы. Вып. 15/Под ред. акад. Б. Б. Кадомцева. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 140 с.

Дан обзор теоретических методов исследования равновесия и устойчивости плазмы в стеллараторах, изложены принципы, на которых основаны равновесие торондальной плазмы и ее стабилизация, и приведены основные результаты аналитической теории и численного счета. Большое внимание уделено потоковым координатам: описано построение различных систем координат, показаны способы их практического применения.

Подробно рассмотрены конфигурации с винтовой симметрией и обычные стеллараторы с плоской осью и винтовыми полями. Дан вывод скалярных двумерных уравнений, которыми описывается равновесие в этих системах. Из этих

уравнений получены одномерные уравнения для смещения и эллиптичности магнитных поверхностей. С использованием модели слабоэллиптических смещенных поверхностей рассмотрена эволюция равновесия плазмы в стеллараторах при повышении ее давления: описаны изменение профиля вращательного преобразования при изменении давления плазмы, генерация тока при быстром ее нагреве и последующее его затухание из-за конечной проводимости плазмы. Обсужден вопрос о зависимости измеряемого экспериментально диамагнитного сигнала от направления тока омического нагрева в обычных стеллараторах.

Приведен вывод уравнений малых колебаний в форме, удобной для изучения локальных возмущений. Из этих уравнений получены критерий Мерсье и уравнения баллоинных мод. Выведены общие достаточные условия устойчивости плазмы в системах с магнитным удержанием.

Ил. 30. Табл. 1. Библиогр. 175

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>МАГНИТОТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЛОТНОЙ ПЛАЗМЕ. Г. Е. Векштейн . . . . .</b>	<b>3</b>
Введение . . . . .	3
1. Особенности остывания и аномальная теплопроводность плазмы с $\beta \gg 1$ . . . . .	5
2. Радиационная волна остывания в плотной замагниченной плазме . . . . .	19
3. Потери магнитного потока при обращении поля в $\theta$ -пинче . . . . .	26
4. Генерация сверхсильных магнитных полей при сжатии плазмы лайнером . . . . .	32
5. Быстрая диссипация энергии магнитного поля в нейтральном слое . . . . .	36
6. Диффузия тяжелых примесей в плотной плазме . . . . .	40
7. Радиационная неустойчивость многокомпонентной плазмы . . . . .	46
Приложение . . . . .	51
Список литературы . . . . .	53
<b>КОЛЛЕКТИВНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С ПЛАЗМОЙ. Б. Н. Брейман . . . . .</b>	<b>55</b>
Введение . . . . .	55
1. Линейное дисперсионное уравнение. Роль резонансов при возбуждении волн частицами . . . . .	56
2. Пучковая неустойчивость в плазме без магнитного поля (возбуждение ленгмюровских волн) . . . . .	59
3. Гидродинамические неустойчивости пучка в магнитоактивной плазме . . . . .	65
4. Кинетические неустойчивости пучка в магнитоактивной плазме . . . . .	72
5. Пучковая неустойчивость в неоднородной плазме . . . . .	77
6. Квазилинейная релаксация РЭП в плазме без магнитного поля . . . . .	83
7. Нелинейное взаимодействие и струйные спектры ленгмюровских волн . . . . .	89
8. Устойчивость стационарного спектра в задаче об индуцированном рассеянии волн . . . . .	94
9. Релаксация РЭП в режиме рассеяния волн на нонах . . . . .	97
10. Накопление электромагнитных волн . . . . .	108
11. Рассеяние ленгмюровских волн на вынужденных флуктуациях плотности . . . . .	113
12. Ленгмюровская турбулентность в магнитоактивной плазме . . . . .	119
13. Взаимодействие пучка с геликонами . . . . .	127
14. Горячие электроны . . . . .	136
Список литературы . . . . .	144
<b>РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАЗМЫ В СТЕЛЛАТОРАХ.</b>	
<i>В. Д. Пустовитов, В. Д. Шафранов . . . . .</i>	<b>146</b>
Введение . . . . .	146

<b>Глава 1. Основные результаты теории . . . . .</b>	<b>149</b>
1.1. Развитие теоретических исследований . . . . .	149
1.2. Основные параметры стеллараторов . . . . .	158
1.3. Удержание плазмы в стеллараторах с пространственной осью . . . . .	161
1.4. Удержание плазмы в обычных стеллараторах . . . . .	166
1.5. Результаты численного счета . . . . .	173
<b>Глава 2. Уравнения трехмерного равновесия . . . . .</b>	<b>183</b>
2.1. Магнитное поле в потоковых координатах . . . . .	183
2.2. Специальный выбор потоковых координат . . . . .	188
2.3. Связь токов с потоками . . . . .	194
2.4. Общая постановка задач равновесия . . . . .	197
2.5. Постановка задач равновесия на основе двумерных уравнений. Описание эволюции равновесия . . . . .	199
2.6. Системы трехмерных уравнений равновесия в различных представлениях . . . . .	202
<b>Глава 3. Конфигурации с винтовой симметрией . . . . .</b>	<b>206</b>
3.1. Уравнение равновесия . . . . .	206
3.2. Основные геометрические соотношения . . . . .	209
3.3. Уравнения связи токов с потоками . . . . .	214
3.4. Другие формулировки уравнения равновесия . . . . .	216
<b>Глава 4. Теория равновесия плазмы в обычных стеллараторах . . . . .</b>	<b>220</b>
4.1. Стеллараторное приближение . . . . .	220
4.2. Потоковые координаты, основные уравнения, особенности их решения методом разложения . . . . .	222
4.3. Сведение трехмерных уравнений равновесия к двумерным . . . . .	226
4.4. Анализ двумерных уравнений и другие их формулировки . . . . .	229
4.5. Вывод скалярного двумерного уравнения равновесия из усредненных МГД-уравнений [42] . . . . .	233
4.6. Об истинных параметрах разложения . . . . .	235
<b>Глава 5. Некоторые особенности равновесия плазмы в стеллараторах</b>	<b>237</b>
5.1. Приближенное описание равновесия . . . . .	237
5.2. Эволюция равновесия плазмы в стеллараторах . . . . .	248
5.3. Об особенностях диамагнитного эффекта в стеллараторах . . . . .	256
<b>Глава 6. МГД-неустойчивости плазмы . . . . .</b>	<b>262</b>
6.1. Уравнения малых колебаний . . . . .	262
6.2. Энергетический принцип . . . . .	266
6.3. Интегральные величины . . . . .	267
6.4. Различные представления источника неустойчивостей $K$ . . . . .	269
6.5. Достаточные критерии устойчивости . . . . .	271
6.6. Вывод критерия Мерсье . . . . .	274
6.7. Вывод уравнений баллонных мод . . . . .	276
<b>Приложения . . . . .</b>	<b>279</b>
<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>287</b>

## **СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ**

### **ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ**

**В ы п. 15**

**Редактор Э. Д. Андреевко**

**Художественный редактор А. Т. Кирьянов**

**Технический редактор Н. П. Собакина**

**Корректор Р. К. Шилова**

**ИБ № 1710**

Сдано в набор 19.06.86 Подписано в печать  
06.02.87 Т-08702 Формат 60×90<sup>1/16</sup> Бумага  
офсетная № 1 Гарнитура литературная Печать  
высокая Усл. печ. л. 18,5 Усл. кр.-отг. 18,5  
Уч.-изд. л. 19,56 Тираж 1450 экз. Заказ 1441.  
Цена 3 р. 40 к.

Энергоатомиздат, 113114, Москва, М-114,  
Шлюзовая наб., 10.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете СССР по делам  
издательств, полиграфии и книжной торговли.  
109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24



# ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ